

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

A. Krieg – S. Walcher

**RWTH**AACHEN  
UNIVERSITY

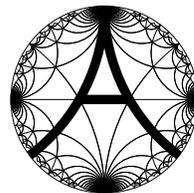
# Gewöhnliche Differentialgleichungen

A. Krieg – S. Walcher

Prof. Dr. Aloys Krieg  
Prof. Dr. Sebastian Walcher

Lehrstuhl A für Mathematik  
RWTH Aachen  
D-52056 Aachen

E-Mail: [krieg@rwth-aachen.de](mailto:krieg@rwth-aachen.de)  
E-Mail: [walcher@mathA.rwth-aachen.de](mailto:walcher@mathA.rwth-aachen.de)  
Internet: <http://www.mathA.rwth-aachen.de/>



©A. Krieg und S. Walcher, Aachen 2010, 2012, 2014, 2019

Der Nachdruck dieses Textes, auch von einzelnen Teilen daraus, ist nicht gestattet.

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . .	1
<b>I. Grundlagen</b>	<b>3</b>
§1. Anwendungsbereiche und Beispiele . . . . .	3
§2. Begriffe und Definitionen . . . . .	6
§3. Elementar lösbare Differentialgleichungen . . . . .	11
§4. Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	20
§5. Erste Anwendungen auf autonome Gleichungen . . . . .	29
§6. Potenzreihenentwicklungen für Lösungen . . . . .	33
<b>II. Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>41</b>
§1. Lineare Systeme: Strukturaussagen . . . . .	41
§2. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	49
§3. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	58
§4. Gekoppelte kleine Schwingungen . . . . .	63
§5. Reihenentwicklungen für lineare Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	67
<b>III. Abhängigkeitssätze</b>	<b>73</b>
§1. Fundamentale Abschätzungen und stetige Abhängigkeit . . . . .	73
§2. Autonome Gleichungen: Eigenschaften des lokalen Flusses . . . . .	78
<b>IV. Autonome Systeme</b>	<b>85</b>
§1. Begriffe und Werkzeuge . . . . .	85
§2. Invariante Mengen . . . . .	91
§3. Lineare Kompartimentsysteme . . . . .	98
§4. Limesmengen . . . . .	101
§5. Stabilität stationärer Punkte . . . . .	106
§6. Weiteres zu Limesmengen . . . . .	113
<b>V. Ebene autonome Gleichungen</b>	<b>119</b>
§1. Topologische Grundlagen und Hilfssätze . . . . .	119
§2. Die POINCARÉ-BENDIXSON-Theorie . . . . .	123
<b>Anhang A</b>	<b>131</b>
<b>Anhang B</b>	<b>135</b>
<b>Anhang C</b>	<b>137</b>
<b>Anhang D</b>	<b>139</b>

**Index****141**

## Vorwort

Dieses Skriptum wurde über mehrere Jahre als Grundlage der am Lehrstuhl A für Mathematik der RWTH Aachen abgehaltenen Einführungsvorlesungen zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen verwendet. Es führt in die Theorie und Anwendungen gewöhnlicher Differentialgleichungen ein, vor allem für die Zielgruppe der Studierenden des Bachelorstudiengangs Mathematik. Vorausgesetzt werden Kenntnisse aus den Grundveranstaltungen zur Analysis und Linearen Algebra. Obwohl die Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ inzwischen nicht mehr vom Lehrstuhl A angeboten wird, scheint nach wie vor Interesse am Skript zu bestehen. Deshalb wird es online frei zugänglich gemacht. Gegenüber der letzten Auflage wurden einige kosmetische Änderungen vorgenommen, das Literaturverzeichnis wurde aktualisiert, am Schluss jedes Kapitels wurden weiterführende Hinweise eingefügt, und der Anhang wurde um einen neuen Teil D erweitert.

Ein wesentliches Ziel des Skriptums ist es, Leserinnen und Lesern mathematische Werkzeuge zur Verfügung zu stellen, mit denen sie konkret vorgelegte Gleichungen oder Klassen von Gleichungen untersuchen können. Aus diesem Grund werden auch einige Anwendungsbeispiele ausführlich vorgestellt. Die Verwendung von Softwarepaketen zur symbolischen oder numerischen expliziten Bestimmung von Lösungen, oder zur Visualisierung, wird in diesem Text nicht thematisiert; es sei aber betont, dass solche Werkzeuge im praktischen Umgang mit Differentialgleichungen sehr wichtig sind. (An der RWTH sind Lehrveranstaltungen zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen Bestandteil des Kanons.) Es sollte auch nicht überraschen, dass in diesem vergleichsweise kurzen Skript Einiges nur angerissen wird, und einige Themen (z.B. Stichwort Chaos) gar nicht vorkommen. Die weiterführende Literatur im Anhang C ergibt ein vollständigeres Bild.

Frau Barbara Giese hat die TEX-Vorlage (inclusive aller Abbildungen) für alle Vorgängerversionen des Skripts und auch für den vorliegenden Text in gewohnt erstklassiger Qualität erstellt.

# I. Grundlagen

## §1. Anwendungsbereiche und Beispiele

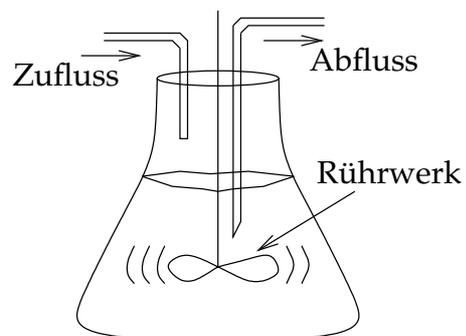
Differentialgleichungen sind von Interesse, weil sie in vielen Wissenschaftsdisziplinen und Praxisfeldern auf natürliche Weise bei der mathematischen Formulierung und Lösung von Problemen auftreten.

Informell gesagt, setzt eine gewöhnliche Differentialgleichung die Ableitungen einer Funktion (einer reellen Variablen) zur Funktion selbst in Beziehung. Weil die Ableitung einer zeitlich veränderlichen Größe sich als momentane Änderungsrate ("Geschwindigkeit") interpretieren lässt, führen also solche Systeme zu Differentialgleichungen, deren Änderungsrate vom momentanen Zustand bestimmt ist. Betrachten wir einige Beispiele:

### A. Ausspülen einer Verunreinigung aus einem Gefäß

In einem Gefäß ist eine (verunreinigende) Substanz in Wasser gelöst, wobei die Konzentration durch ein Rührwerk konstant gehalten wird.

Durch Pumpen wird nun einerseits Mischung abgeführt, andererseits reines Wasser zugeführt, wie in der schematischen Skizze dargestellt. Zusätzlich nehmen wir an, dass Zufuhr und Abfuhr mit der gleichen konstanten Rate erfolgen; das Gesamtvolumen im Gefäß bleibt also konstant.



Zur Beschreibung brauchen wir einige Größen:

Sei  $V$  das Volumen des Gemisches im Gefäß,  $m$  die Masse der Substanz im Gemisch (dies ist eine zeitabhängige Größe) und  $c = \frac{m}{V}$  ihre Konzentration. Schließlich nennen wir  $v$  (mit Dimension Volumen/Zeit) das pro Zeiteinheit zu- bzw. abgeführte Volumen von Wasser bzw. Gemisch (anders gesagt: die Geschwindigkeit der Pumpen).

Das System ist (dank Homogenität) durch die Masse  $m$  komplett charakterisiert, wir wollen nun eine Gleichung für seine zeitliche Entwicklung herleiten:

Die Masse der Substanz wird mit momentaner Änderungsrate

$$v \cdot c(t) = v \cdot \frac{m(t)}{V}$$

zum Zeitpunkt  $t$  abgeführt. Also hat man die Bilanzgleichung

$$m(t + \Delta t) - m(t) = \int_t^{t+\Delta t} -\frac{v}{V} \cdot m(s) ds,$$

denn Integration der Änderungsrate ergibt die Massendifferenz zwischen zwei Zeitpunkten.

Wir nehmen an, dass  $m(t)$  zumindest stetig ist (dies liegt aus physikalischen Erwägungen nahe). Dann hat man mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{1}{\Delta t} (m(t + \Delta t) - m(t)) = -\frac{v}{V} \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(s) ds = -\frac{v}{V} \cdot m(\tau)$$

für ein geeignetes  $\tau$  zwischen  $t$  und  $t + \Delta t$ .

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  gilt  $\tau \rightarrow t$ , also ist  $m$  in  $t$  differenzierbar mit

$$\dot{m}(t) = -\frac{v}{V} \cdot m(t).$$

Es ist klar, wie sich Varianten behandeln lassen. So kann man z. B. annehmen, dass die Substanz auch zugeführt wird; dies ergibt mit entsprechender Betrachtung der Massenbilanz eine ähnliche Gleichung.

*Anmerkung:* In vielen Büchern findet man Herleitungen etwa folgender Art: "In einem kleinen Zeitintervall zwischen  $t$  und  $t + dt$  ist die Konzentration praktisch gleich  $c(t)$ , also die abgeführte Masse gleich  $dm = v \cdot c(t) dt = \frac{m(t)}{V} \cdot v dt$ , und Dividieren durch  $dt$  liefert die Differentialgleichung". Dies ist zweifellos weniger umständlich als die Argumentation oben, und als Daumenregel auch nützlich, aber doch ziemlich verwaschen. (Von der Tatsache, dass  $\frac{dm}{dt}$  eben *kein* Quotient von Zahlen ist, sehen wir mal ab ...). Dieses Beispiel illustriert, dass auch die *Herleitung* von Gleichungen eine mathematische Aufgabe sein kann.

## B. NEWTONSche Mechanik: Freier Fall

Das Zweite NEWTONSche Gesetz der Mechanik

$$\text{„Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung“}$$

führt auf viele wichtige Differentialgleichungen.

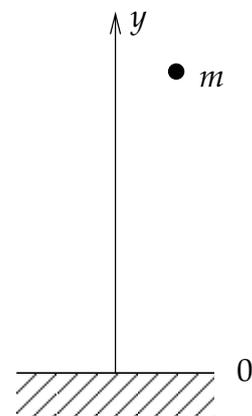
Betrachten wir ein einfaches Beispiel:

Eine Masse  $m$  fällt im homogenen Gravitationsfeld der Erde (Kraft  $m \cdot g$  nach unten gerichtet; dabei ist  $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$  die Erdbeschleunigung).

Wie in der Skizze bezeichne  $y(t)$  die momentane Höhe der Masse über dem Erdboden. Dann ist die Zeitableitung  $\dot{y}(t)$  die momentane Geschwindigkeit und die zweite Zeitableitung  $\ddot{y}(t)$  die momentane Beschleunigung. Nach Newton gilt

$$m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g,$$

also  $\ddot{y} = -g$ .



Diese einfache Gleichung lässt sich bekanntlich mit Integralrechnung lösen: Man erhält

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$$

mit geeigneten Konstanten  $c_1, c_2$ , welche durch die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangshöhe bestimmt sind.

Weniger einfach wird es mit Luftwiderstand. Nimmt man den so genannten STOKESSchen Widerstand an, so ist die Widerstandskraft proportional zur Geschwindigkeit und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt, also erhält man die Gleichung

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot \dot{y} - m \cdot g$$

wobei  $k$  eine positive Konstante ist. Hier kommt man mit Integralrechnung allein nicht weiter, jedenfalls nicht direkt.

In manchen Fällen (etwa bei einem Fallschirmspringer mit offenem Schirm) ist die Annahme realistischer, dass die Widerstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist (sog. NEWTONScher Widerstand); hier hat man die Gleichung

$$m \cdot \ddot{y} = k^* \cdot (\dot{y}^2) - m \cdot g$$

mit einer positiven Konstanten  $k^*$  (falls  $\dot{y} < 0$ ).

Das Lösen solcher Gleichungen wird bald kein Problem mehr sein.

### C. NEWTONSche Mechanik: Massenpunkte mit Gravitationswechselwirkung

Gegeben sind (im „leeren Raum“  $\mathbb{R}^3$ )  $N$  Punktmassen mit Massen  $m_1, \dots, m_N$  und momentanen Positionen  $x_1(t), \dots, x_N(t)$ . (Beachte  $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$  für alle  $i$ .) Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft, welche die Punktmasse mit Nummer  $j$  auf die Punktmasse Nummer  $i$  ausübt, gleich

$$F_{ji} = \frac{\gamma m_i m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i).$$

Dabei ist  $\gamma$  eine positive Konstante, die sog. Gravitationskonstante; und  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm. Weil sich die Kräfte addieren, liefert das Zweite NEWTONSche Gesetz das System

$$\ddot{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\gamma m_j}{\|x_j - x_i\|^3} (x_j - x_i), \quad 1 \leq i \leq N$$

für insgesamt  $3N$  unbekannte Funktionen.

Für  $N > 2$  ist an eine Lösung (mit Hilfe uns bekannter Funktionen) nicht mehr zu denken. Aber es gibt theoretische Resultate und Hilfsmittel, die Aussagen über Eigenschaften von Lösungen ermöglichen, ohne die Lösungen explizit zu kennen.

Zahlreiche weitere Beispiele werden in den folgenden Abschnitten behandelt.



## §2. Begriffe und Definitionen

Zunächst muss festgehalten werden, worum es gehen soll.

**(2.1) Definition.** a) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(x, y)$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung*. Unter einer *Lösung* dieser Differentialgleichung versteht man jede auf einem nicht entarteten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\varphi$  ist differenzierbar.
- (ii)  $\text{graph } \varphi = \{(x, \varphi(x)); x \in I\} \subset G$ .
- (iii)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  für alle  $x \in I$ .

Unter einer *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

versteht man eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung mit der Eigenschaft  $a \in I$  und  $\varphi(a) = b$ .

b) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(x, y)$$

ein *System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung*. (Man spricht auch von einer Differentialgleichung erster Ordnung auf dem  $\mathbb{R}^n$ .) Unter einer *Lösung* versteht man jede auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\varphi$  ist differenzierbar.
- (ii)  $\text{graph } \varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\} \subset G$ .
- (iii)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  für alle  $x \in I$ .

Unter einer *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

mit  $(a, b) \in G$  versteht man jede Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung mit  $a \in I$  und  $\varphi(a) = b$ .

c) Gibt es in der Situation von a) oder b) ein  $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$  und ein  $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  so, dass  $G = \mathbb{R} \times \tilde{G}$  und  $f(x, y) = \tilde{f}(y)$  für alle  $(x, y) \in G$ , so heißt die Differentialgleichung *autonom* und wird auch in der Form

$$y' = \tilde{f}(y)$$

geschrieben.

**(2.2) Bemerkungen.** a) In den Randpunkten von  $I$ , die zu  $I$  gehören, ist natürlich einseitige Differenzierbarkeit von  $\varphi$  gemeint. Weil  $f$  stetig ist, ist jede Lösung der Differentialgleichung automatisch stetig differenzierbar.

b) Rein äußerlich sehen die Definitionen in (2.1) a) und (2.1) b) völlig gleich aus. Mit  $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^t$  sieht man das System deutlicher, wenn man die Gleichung in (2.1) b) schreibt als

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

c) Die Bezeichnungen sind flexibel. In physikalischen (und anderen) Anwendungen werden - wie gesehen - oft zeitabhängige Funktionen  $z(t)$  untersucht, die eine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{oder} \quad \dot{y} = f(t, y)$$

erfüllen. Auch  $x(t)$ ,  $\dot{x} = f(x)$  usw. sind übliche Notation. Die Rolle der Symbole erschließt sich aus dem Zusammenhang.

**(2.3) Beispiele.** a) Wenn  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $f(x, y) = g(x)$  gar nicht von  $y$  abhängt, so ist eine Lösung der Differentialgleichung genau eine Stammfunktion der stetigen Funktion  $g(x)$ . Das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = g(x), \quad y(a) = b$$

hat nach den Fundamentalsätzen der Differential- und Integralrechnung auf jedem Intervall  $I$  im Definitionsbereich von  $g$ , das  $a$  enthält, die eindeutige Lösung

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := b + \int_a^x g(t) dt.$$

b) Aus der Analysis ist bekannt, dass die Differentialgleichung  $y' = \alpha y$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , genau die Lösungen  $\varphi(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , besitzt. Somit hat das Anfangswertproblem

$$y' = \alpha y, \quad y(a) = b,$$

die eindeutige Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := b \cdot e^{\alpha(x-a)}.$$

c) In §1 A haben wir für  $m(t)$  eine Differentialgleichung hergeleitet. Gemäß Beispiel b) können wir Lösungen dafür angeben.

d) Die so genannte "logistische Gleichung"

$$\dot{y} = y(1 - y)$$

besitzt die Lösungen  $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_k(t) = e^t / (k + e^t)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , wie Einsetzen zeigt.

Das Anfangswertproblem  $\dot{y} = y(1 - y)$ ,  $y(0) = 2$  besitzt die Lösung  $\varphi_{-1/2}$  auf dem Intervall  $(-\ln 2, \infty)$ . Man beachte, dass  $-\ln 2$  Nullstelle des Nenners ist.

Das Anfangswertproblem  $\dot{y} = y(1 - y)$ ,  $y(0) = 0$  besitzt die Nullfunktion als Lösung.

e) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus  $y_1' = y_1$  und  $y_1(0) = 1$  folgt nach b)  $y_1(x) = e^x$ . Man erhält

$$y_2' = y_2 + e^x, \quad y_2(0) = 2.$$

Nachrechnen zeigt, dass  $y_2(x) = e^x(x+2)$  dieses Anfangswertproblem löst, also haben wir eine Lösung

$$y(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ x+2 \end{pmatrix}.$$

Ein systematisches Lösungsverfahren werden wir später kennen lernen.

f) A priori spricht nichts dagegen, auch unstetige Funktionen  $f$  in Definition (2.1) zuzulassen. Allerdings stellt man damit die Existenz von Lösungen in Frage.

Nimmt man etwa  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

(und  $f(0, y)$  nach Belieben), so hat das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(0) = 0$  keine Lösung. Wäre  $\varphi$  eine solche, so ergibt sich (mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung) zwangsläufig

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ x, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

und  $\varphi$  ist in 0 nicht differenzierbar.

Simultan werden wir im Folgenden das Auftreten von Ableitungen höherer Ordnung behandeln:

**(2.4) Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*. Unter einer *Lösung* dieser Gleichung versteht man jede auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\varphi$  ist  $n$ -mal differenzierbar.
- (ii)  $\{(x, y_0, \dots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n; y_\nu = \varphi^{(\nu)}(x), 0 \leq \nu \leq n-1\} \subset G$ .
- (iii)  $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$  für alle  $x \in I$ .

Unter einer *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(a) = b_0, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1},$$

versteht man jede Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung mit  $a \in I$ ,  $(a, b_0, \dots, b_{n-1}) \in G$  und der Eigenschaft  $\varphi(a) = b_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$ .

Natürlich ist  $\varphi$   $n$ -mal stetig differenzierbar.

**(2.5) Beispiele.** a) Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = y \quad \text{für } x \in I = \mathbb{R}.$$

Dann erfüllen  $z = y + y'$  bzw.  $w = y - y'$  die Differentialgleichungen

$$z' = y' + y'' = y' + y = z \quad \text{bzw.} \quad w' = y' - y'' = y' - y = -w.$$

Es folgt  $z = \alpha e^x$  und  $w = \beta e^{-x}$  aus (2.3) b). Man erhält

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x) = \frac{1}{2}(z(x) + w(x)) = \frac{1}{2}(\alpha e^x + \beta e^{-x}).$$

Das Anfangswertproblem

$$y'' = y, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7,$$

besitzt daher die eindeutige Lösung

$$y(x) = 5e^x - 2e^{-x} = 3 \cosh x + 7 \sinh x.$$

b) Für die Höhe  $y(t)$  einer frei fallenden Masse über dem Erdboden wurden in §1 B die Gleichungen

$$\ddot{y} = -g \quad (\text{ohne Luftwiderstand})$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \cdot \dot{y} - g \quad (\text{mit STOKES-Luftwiderstand})$$

$$\ddot{y} = \frac{k^*}{m} \cdot (\dot{y})^2 - g \quad (\text{mit NEWTON-Luftwiderstand})$$

hergeleitet. Dies sind gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Gleichungen höherer Ordnung lassen sich immer auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung reduzieren.

**(2.6) Satz. (Reduktionssatz)** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Zu der Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$(1) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

betrachte man das System von Differentialgleichungen erster Ordnung in  $(y_0, \dots, y_{n-1})$

$$(2) \quad \begin{cases} y_0' &= y_1, \\ y_1' &= y_2, \\ \vdots & \\ y_{n-2}' &= y_{n-1}, \\ y_{n-1}' &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

a) Ist  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (1), dann ist  $\psi := (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})^t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (2).

b) Ist  $\psi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})^t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (2), dann ist  $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (1).

Also gibt es eine Bijektion zwischen den Lösungen von (1) und (2) auf dem Intervall  $I$ .

**Beweis.** a) Sei  $\varphi_\nu = \varphi^{(\nu)}$ . Dann gilt  $\varphi'_\nu = \varphi_{\nu+1}$  für  $\nu = 0, 1, \dots, n-2$  und

$$\varphi'_{n-1} = \varphi^{(n)} = f(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}) = f(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}).$$

Also ist  $\psi$  eine Lösung von (2).

b) Aus (2) erhält man

$$\varphi_1 = \varphi'_0, \quad \varphi_2 = \varphi'_1 = \varphi''_0, \dots, \varphi_{n-1} = \varphi'_{n-2} = \varphi_0^{(n-1)}$$

sowie

$$\varphi_0^{(n)} = \varphi'_{n-1} = f(x, \varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) = f(x, \varphi_0, \varphi'_0, \dots, \varphi_0^{(n-1)}).$$

Also ist  $\varphi_0$  eine Lösung von (1).

Die in a) und b) angegebenen Abbildungen sind offenbar invers zueinander.  $\square$

**(2.7) Beispiel.** Für die in (2.5) b) gegebene Gleichung mit STOKESSchem Luftwiderstand ist das zugehörige System:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -\frac{k}{m}y_1 - g. \end{aligned}$$

**(2.8) Bemerkung.** Es gibt auch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung. Diese lassen sich analog zum Reduktionssatz in ein höherdimensionales System erster Ordnung umwandeln.

**(2.9) Beispiel.** Betrachten wir das in §1 C gegebene System mit zwei Massenpunkten (also  $N = 2$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\gamma m_2}{\|x_2 - x_1\|^3} \cdot (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\gamma m_1}{\|x_1 - x_2\|^3} \cdot (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Setzt man  $y_1 = \dot{x}_1$ ,  $y_2 = \dot{x}_2$ , so hat man ein (12-dimensionales) System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_1 &= \frac{\gamma m_2}{\|x_2 - x_1\|^3} \cdot (x_2 - x_1) \\ \dot{y}_2 &= \frac{\gamma m_1}{\|x_1 - x_2\|^3} \cdot (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses einleitenden Paragraphen sollen die Fragen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen formuliert werden, um deren Beantwortung es in den folgenden Abschnitten geht:

- (2.10) Grundlegende Fragen.**
- *Existenz:* Hat eine gewöhnliche Differentialgleichung (bzw. ein System)  $y' = f(x, y)$  eine Lösung? Hat das Anfangswertproblem mit  $y(a) = b$  eine Lösung?
  - *Eindeutigkeit:* Kann ein Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = b$  mehr als eine Lösung haben? Unter welchen Umständen gibt es höchstens eine Lösung?
  - *Eigenschaften von Lösungen:* Welche Eigenschaften von Lösungen (denkbar sind etwa Beschränktheit, periodisches Verhalten usw.) lassen sich aus der Differentialgleichung ableiten?

### §3. Elementar lösbare Differentialgleichungen

Wir haben bereits einige Differentialgleichungen hergeleitet und gesehen, die sich mit bekannten elementaren Funktionen lösen lassen (vgl. (2.3) b),c),d),e), (2.5) a)), oder zumindest auf Probleme der Integralrechnung zurückführen lassen (vgl. 2.3) a)). Allgemein sollte man solche expliziten Lösungen (oder Formeln) aber nicht erwarten; gerade deshalb ist eine mathematische Theorie der Differentialgleichungen ja nötig.

Jedoch gibt es eine Reihe von anwendungsrelevanten Gleichungen, deren Lösung sich elementar bestimmen lässt. Einige davon sollen in diesem Abschnitt betrachtet werden.

**(3.1) Satz.** (*Separation der Variablen*) Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  nicht entartete Intervalle und seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetige Funktionen. Für  $(x_0, y_0) \in I \times J$  sei

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

$$G : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds.$$

a) Sei  $I' \subset I$  ein Intervall mit  $x_0 \in I'$  und  $F(I') \subset G(J)$ . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$(1) \quad y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

eine eindeutige Lösung  $\phi$  auf  $I'$ . Diese erfüllt

$$(2) \quad G(\phi(x)) = F(x) \quad \text{für alle } x \in I'.$$

b) Es sei  $\psi$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I^* \subset I$ ,  $x_0 \in I^*$ , mit  $\psi(x_0) = y_0$  und  $G(\psi(x)) = F(x)$  für alle  $x \in I^*$ . Weiter sei  $\psi$  auf kein größeres Teilintervall von  $I$  stetig fortsetzbar. Dann ist jede Lösung des Anfangswertproblems (1) eine Restriktion von  $\psi$ . Man nennt  $I^*$  das maximale Existenzintervall der Lösung von (1).

**Beweis.** a) *Eindeutigkeit:* Sei  $\phi : I' \rightarrow J$  eine beliebige Lösung des Anfangswertproblems (1). Aus  $\phi'(x) = f(x) \cdot g(\phi(x))$  und  $g(\phi(x)) \neq 0$  folgt

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x) \quad \text{für alle } x \in I'$$

und damit

$$\int_{x_0}^x \frac{\phi'(t)}{g(\phi(t))} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Mit der Substitution  $s = \phi(t)$  und  $y_0 = \phi(x_0)$  erhält man

$$G(\phi(x)) = \int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) \quad \text{für alle } x \in I',$$

also (2). Wegen  $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$  für alle  $y \in J$  und der Stetigkeit von  $g$  ist  $G$  streng monoton auf  $J$  und besitzt somit eine streng monotone, stetig differenzierbare Umkehrfunktion  $H : G(J) \rightarrow J$ . Aus (2) folgt

$$\phi(x) = H(F(x)) \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt, falls sie existiert.

*Existenz:* Wir definieren nun

$$\phi : I' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := H(F(x)).$$

Wegen  $G(y_0) = 0$  gilt

$$\phi(x_0) = H(F(x_0)) = H(0) = y_0.$$

Mit  $G(\phi(x)) = F(x)$  ergibt sich aus den Definitionen von  $G$  und  $F$

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = G'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Folglich ist  $\phi$  eine Lösung des Anfangswertproblems.

Teil b) folgt sofort, weil gemäß (2.1) jede Lösung auf einem Intervall definiert ist.  $\square$

**(3.2) Bemerkungen.** a) Als einprägsame Merkregel schreibt sich das Vorgehen wie folgt:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x), \quad \text{also} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c.$$

Man erhält dann die Lösung durch Auflösen nach  $y$  (und ggf.  $c$  aus den Anfangsbedingungen).

b) Man betrachte das Anfangswertproblem (1) in dem Fall  $g(y_0) = 0$ . Dann ist die konstante Funktion  $\phi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\phi(x) \equiv y_0$  offenbar eine Lösung des Anfangswertproblems. Man nennt  $\phi$  eine *partikuläre Lösung* der Differentialgleichung  $y' = f(x) \cdot g(y)$ . Beachte, dass Satz (3.1) hierzu keine Aussage macht. Das Anfangswertproblem  $y' = f(x) \cdot g(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  kann jedoch auch weitere Lösungen haben. Falls zum Beispiel das uneigentliche Integral

$\int_{y_0}^y ds/g(s)$  konvergiert, erhält man solche mit sinngemäßer Anwendung der Prozedur aus dem Satz.

c) Insbesondere lassen sich autonome Differentialgleichungen  $y' = g(y)$  auf Intervallen in  $\mathbb{R}$  mit Separation der Variablen lösen.

**(3.3) Beispiele.** a) Für  $I = J = \mathbb{R}$  betrachte man das Anfangswertproblem

$$y' = (y^2 + 1)x^3, \quad y(0) = 1.$$

Gemäß (3.2) hat man

$$\arctan y = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x^3 dx + c = \frac{1}{4}x^4 + c.$$

Aus  $x_0 = 0, y_0 = 1$  erhält man  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = c$ . Dann folgt

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^4 + \pi}{4}\right).$$

Die Funktion auf der rechten Seite besitzt einen Pol, wo  $(x^2 + \pi)/4 = \pi/2$ . Das maximale Existenzintervall der Lösung ist also gegeben durch  $\frac{x^4 + \pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ , also  $x^4 < \pi$ , d. h.  $I' = (-\sqrt[4]{\pi}, \sqrt[4]{\pi})$ .

b) Wir betrachten  $I = \mathbb{R}$  und  $J = (0, \infty)$  oder  $J = (-\infty, 0)$  sowie

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0.$$

Im Fall  $y_0 = 0$  erhält man  $y \equiv 0$  als Lösung. Für  $y_0 \neq 0$  hat man

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int dx + c = x + c.$$

Mit  $x_0 = 0$  folgt  $-\frac{1}{y_0} = c$ , also

$$y(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1 - y_0 \cdot x}.$$

In diesem Fall ist das maximale Existenzintervall

$$I' = \begin{cases} \left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right), & \text{falls } y_0 > 0, \\ \left(\frac{1}{y_0}, \infty\right), & \text{falls } y_0 < 0. \end{cases}$$

c) Man betrachte die logistische Gleichung (siehe Beispiel (2.3) d))

$$\dot{y} = y(1 - y)$$

mit  $I = \mathbb{R}, J = (0, 1)$  so dass  $g(y) = y(1 - y)$  keine Nullstelle auf  $J$  hat. Seien  $y_0 \in J, t_0 \in \mathbb{R}$ . Hier ist

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y(1 - y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}$$



(Partialbruchzerlegung), also

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} ds = \ln(y) - \ln(y_0) - \ln(1-y) + \ln(1-y_0) \\ &= \ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{y_0}{1-y_0}, \end{aligned}$$

und für die Lösung  $\varphi(t)$  des Anfangswertproblems folgt

$$\begin{aligned} \ln \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} &= \ln \frac{y_0}{1-y_0} + t - t_0, \\ \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} &= \frac{y_0}{1-y_0} \cdot e^{t-t_0}, \\ \varphi(t) &= \left( 1 + \frac{1-y_0}{y_0} \cdot e^{t_0-t} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Das maximale Existenzintervall ist hier  $\mathbb{R}$ .

Auf den Intervallen  $(-\infty, 0)$  sowie  $(1, \infty)$  führt eine analoge Rechnung zur selben Lösungsformel.

d) Das Anfangswertproblem

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

besitzt die Nullfunktion als konstante Lösung. Aber für jedes  $c \geq 0$  ist auch

$$\psi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < c \\ (x-c)^2, & \text{falls } x \geq c \end{cases}$$

eine Lösung. Man erhält sie durch Anwendung des Verfahrens aus Satz (3.1) im Intervall  $c < x < \infty$ .

Den Spezialfall  $g(y) = y$  von (3.1) formulieren wir als

**(3.4) Korollar.** (Homogene lineare Differentialgleichungen) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ ,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  des Anfangswertproblems

$$y' = a(x) \cdot y, \quad y(x_0) = y_0,$$

nämlich

$$\phi(x) = y_0 \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x a(t) dt \right).$$

**Beweis.** Im Fall  $y_0 \neq 0$  kann man (3.1) direkt auf  $f(x) = a(x)$  und  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (falls  $y_0 > 0$ ), bzw.  $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  (falls  $y_0 < 0$ ) mit  $g(y) = y$  anwenden. Für  $y_0 > 0$  erhält man

$$\ln y - \ln y_0 = \int_{x_0}^x a(t) dt,$$

also

$$y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \quad \text{mit } I' = I.$$

Im Fall  $y_0 < 0$  ergibt sich die Behauptung analog aus

$$\ln(-y) - \ln(-y_0) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Im Fall  $y_0 = 0$  ist die Eindeutigkeit separat zu beweisen. Wäre  $\phi \neq 0$ , so würde es ein  $x_1 \in I$  mit  $\phi(x_1) = y_1 \neq 0$  geben. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a(x) \cdot y, \quad y(x_1) = y_1,$$

auf  $I$  ist aber bereits bekannt und hat keine Nullstelle. Das ist ein Widerspruch.  $\square$

**(3.5) Beispiele.** a) Sei  $I = (0, \infty)$  und

$$y' = (\ln x) \cdot y, \quad y(1) = 1.$$

Dann gilt nach (3.4) für  $x \in I$

$$y(x) = \exp\left(\int_1^x \ln t dt\right) = \exp(t \ln t - t|_1^x) = \exp(x \ln x - x + 1) = x^x \cdot e^{1-x}.$$

b) Sei  $I = \mathbb{R}$  und

$$y' = \frac{y}{1+x^2}, \quad y(0) = y_0.$$

Nach (3.4) gilt für  $x \in I$

$$y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt\right) = y_0 \cdot \exp(\arctan t|_0^x) = y_0 \cdot e^{\arctan x}.$$

Wir benutzen nun die explizite Formel aus (3.4), um so genannte *inhomogene lineare Differentialgleichungen* zu lösen.

**(3.6) Satz.** (Variation der Konstanten) Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = a(x) \cdot y + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

genau eine Lösung  $\psi(x)$  auf  $I$ , nämlich

$$\psi(x) = \phi(x) \cdot u(x)$$

mit

$$\phi(x) := \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \quad \text{und} \quad u(x) := y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\phi(t)} dt \quad \text{für } x \in I.$$

**Beweis. Eindeutigkeit:** Sind  $y_1, y_2$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems, so ist die Funktion  $v(x) := y_1(x) - y_2(x)$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = y_1' - y_2' = (a(x) \cdot y_1 + b(x)) - (a(x) \cdot y_2 + b(x)) = a(x) \cdot v, \quad v(x_0) = 0.$$

Aus (3.4) ergibt sich  $v \equiv 0$ , also  $y_1 = y_2$ .

**Existenz:** Die Funktion  $\phi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$  erfüllt nach (3.4) die Gleichungen

$$\phi' = a(x) \cdot \phi \quad \text{und} \quad \phi(x_0) = 1.$$

Die Funktion  $\psi(x) := \phi(x) \cdot u(x)$  genügt daher genau dann der Differentialgleichung

$$\psi' = a(x) \cdot \psi + b(x),$$

wenn gilt:

$$\phi' \cdot u + \phi \cdot u' = \psi' = a \cdot \phi \cdot u + b, \quad \psi(x_0) = \phi(x_0) \cdot u(x_0) = u(x_0) = y_0.$$

Wegen  $\phi' = a \cdot \phi$  ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\phi \cdot u' = b, \quad \text{d. h.} \quad u' = \frac{b}{\phi}, \quad u(x_0) = y_0.$$

Damit erhält man

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\phi(t)} dt, \quad x \in I,$$

und somit die Behauptung. □

Der Name "Variation der Konstanten" hat folgenden Hintergrund: Im Falle  $b \equiv 0$  hat man  $\psi(x) = \phi(x) \cdot y_0$  mit einer Konstanten  $y_0$ . Im Falle  $b \neq 0$  führt es zum Ziel, wenn man "die Konstante variabel macht".

**(3.7) Beispiel.** Wir betrachten  $I = \mathbb{R}$ ,

$$y' = 4xy + 2x^3, \quad y(0) = y_0.$$

Also ist  $a(x) = 4x, b(x) = 2x^3$  und man erhält für  $x \in I$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp\left(\int_0^x 4t dt\right) = \exp(2t^2|_0^x) = e^{2x^2}, \\ \psi(x) &= e^{2x^2} \left[ y_0 + \int_0^x \frac{2t^3}{e^{2t^2}} dt \right] = e^{2x^2} \left[ y_0 + \int_0^{x^2} se^{-2s} ds \right] \\ &= e^{2x^2} \left[ y_0 + \left( -\frac{1}{2}s - \frac{1}{4} \right) e^{-2s} \Big|_0^{x^2} \right] = e^{2x^2} \left[ y_0 - \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \right) e^{-2x^2} + \frac{1}{4} \right] \\ &= \left( y_0 + \frac{1}{4} \right) e^{2x^2} - \frac{1}{4} (2x^2 + 1). \end{aligned}$$

Einige Differentialgleichungen lassen sich durch geeignete Transformationen auf lineare zurückführen. Die bekannteste Klasse wird im folgenden Satz beschrieben.

**(3.8) Satz.** (BERNOULLISCHE Differentialgleichungen) Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $x_0 \in I$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Ist dann  $\varphi$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(3) \quad y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^m, \quad y(x_0) = y_0$$

(wobei  $y_0 \neq 0$  und  $y_0 > 0$ , falls  $m \notin \mathbb{Z}$ ) auf einem Intervall  $J \subset I$  mit  $x_0 \in J$  und  $\varphi(x) \neq 0$  für alle  $x \in J$ , so ist  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma(x) := \varphi(x)^{1-m}$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x)$$

zum Anfangswert  $z(x_0) = y_0^{1-m}$ . Insbesondere ist die Lösung von (3) lokal eindeutig.

**Beweis.** Nach Voraussetzung existiert  $\gamma$  auf  $J$  und ist mit  $\varphi$  differenzierbar. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= (1-m)\varphi(x)^{-m}\varphi'(x) \\ &= (1-m)\varphi(x)^{-m}(a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi(x)^m) \\ &= (1-m)a(x)\gamma(x) + (1-m)b(x), \end{aligned}$$

denn  $\varphi$  löst die BERNOULLI-Differentialgleichung. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus der Injektivität von  $y \mapsto y^{1-m}$  in einer Umgebung von  $y_0$  und der Eindeutigkeitsaussage in (3.4). □

**(3.9) Bemerkungen.** a) Die Voraussetzungen an  $y_0$  garantieren, dass  $y_0^m$  und  $y_0^{1-m}$  existieren. Sie sind *nicht* so allgemein wie möglich gefasst; für  $m = \frac{1}{3}$  etwa lassen sich  $y_0^{1/3}$  und  $y_0^{2/3}$  für alle  $y_0 \in \mathbb{R}$  eindeutig definieren.

b) Um die Lösung  $\varphi$  zu erhalten, kann man also zuerst nach (3.6) die Lösung  $\gamma$  des linearen Anfangswertproblems bestimmen und dann  $\gamma = \varphi^{1-m}$  oder, mit gebotener Vorsicht,  $\varphi = \pm \gamma^{\frac{1}{1-m}}$ , benutzen.

**(3.10) Beispiele.** a)  $y' = y - y^3$ ,  $y(0) = y_0 \neq 0$ . Hier ist  $m = 3$ . Ist also  $\varphi$  Lösung des Anfangswertproblems auf  $J \subset \mathbb{R}$ , so ist  $\gamma = \varphi^{-2}$  Lösung der linearen Differentialgleichung

$$z' = -2z + 2, \quad z(0) = y_0^{-2} > 0.$$

Diese lineare Differentialgleichung lässt sich mit (3.6) einfach lösen; man erhält

$$\gamma(x) = 1 + (y_0^{-2} - 1)e^{-2x}.$$

- Für  $y_0 = 2$  ist  $\gamma(x) = 1 - \frac{3}{4}e^{-2x}$  und  $\varphi(x) > 0$  für alle  $x \in J$ , weshalb

$$\varphi(x) = \gamma(x)^{-1/2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2x}}^{-1}$$

für alle  $x \in J$ . Es ist klar, dass man  $J = (-\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}, \infty)$  wählen kann; dies ist das größte offene Intervall, in dem die explizit gefundene Funktion existiert. Weil das lineare Anfangswertproblem auf  $J$  genau eine Lösung hat, gilt dies auch für  $y' = y - y^3$ ,  $y(0) = 2$ .

- Für  $y_0 = -3$  ist  $\gamma(x) = 1 - \frac{8}{9}e^{-2x}$  und  $\varphi(x) < 0$  für alle  $x \in J$ , also

$$\varphi(x) = -\gamma(x)^{-1/2} = -\sqrt{1 - \frac{8}{9}e^{-2x}}^{-1}$$

und man fährt analog fort.

- Für  $y_0 = 0$  ist  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = 0$  eine Lösung (direkte Verifikation); (3.8) ist hier nicht anwendbar.

b)  $y' = 2y + x\sqrt{y}$ ,  $y(1) = 1$ . Hier ist  $m = \frac{1}{2}$  und das zugehörige lineare Anfangswertproblem für  $\gamma = \varphi^{1-1/2} = \sqrt{\varphi}$  ist

$$z' = z + \frac{x}{2}, \quad z(1) = 1.$$

Nach (3.6) ist

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= e^{x-1} \cdot \left( 1 + \int_1^x \frac{t/2}{e^{t-1}} dt \right) \\ &= e^{x-1} \cdot \left( 1 + \frac{e}{2} \int_1^x t \cdot e^{-t} dt \right) \\ &= e^{x-1} \cdot \left( 1 + \frac{e}{2} \left[ -(t+1)e^{-t} \right]_1^x \right) \\ &= 2e^{x-1} - \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

und  $\varphi(x) = \gamma(x)^2$  ist laut (3.8) die eindeutige Lösung auf jedem Intervall  $J$  mit  $1 \in J$ , in dem  $\gamma$  keine Nullstelle besitzt. Eine Kurvendiskussion ergibt, dass  $\gamma$  bei  $x_0 = 1 - \ln 4$  ein globales Minimum mit  $\gamma(x_0) = \frac{1-\ln 4}{2} < 0$  besitzt. In dem Intervall  $(\alpha, \beta)$ , wo  $\gamma$  negative Werte annimmt, ist die Voraussetzung und Aussage von (3.8) nicht erfüllt, aber  $\varphi$  weiter eine Lösung (mit  $\sqrt{\varphi} = |\gamma|$ ).

Weitergehende Eindeutigkeitsaussagen lassen sich nicht ohne Einschränkungen treffen; es ist auch

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{falls } x \geq \beta, \\ 0, & \text{falls } x < \beta, \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems.

Eine weitere Klasse von Differentialgleichungen betrachten wir in dem folgenden

**(3.11) Satz.** (Homogene Differentialgleichungen) Sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Seien  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  so, dass  $\frac{y_0}{x_0} \in J$  und  $f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0}$ . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$(4) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0,$$

auf einem geeigneten Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I \subset \mathbb{R}^*$  eine eindeutige Lösung  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Man erhält

$$\phi(x) = x \cdot \psi(x),$$

wobei  $\psi(x)$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(5) \quad z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad z(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$$

mit separierten Variablen ist.

**Beweis.** Sei  $\phi(x)$  eine Lösung von (4) und  $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{x}$ . Dann gilt

$$\psi'(x) = \frac{\phi'(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^2} = \frac{f\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}[f(\psi(x)) - \psi(x)], \quad \psi(x_0) = \frac{\phi(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}.$$

Also ist  $\psi(x)$  eine Lösung von (5). Ist nun umgekehrt  $\psi(x)$  eine Lösung von (5) und  $\phi(x) = x \cdot \psi(x)$ , so folgt

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \psi(x) + x \cdot \psi'(x) = \psi(x) + x \cdot \frac{f(\psi(x)) - \psi(x)}{x} = f(\psi(x)) = f\left(\frac{\phi(x)}{x}\right), \\ \phi(x_0) &= x_0 \cdot \psi(x_0) = y_0. \end{aligned}$$

Demnach ist  $\phi$  eine Lösung von (4). Weil (5) eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist, folgen die Existenz und die Eindeutigkeit aus (3.1).  $\square$

Als Merkregel substituiert man  $z = \frac{y}{x}$  und löst die Gleichung

$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

**(3.12) Beispiel.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = 4 - 3\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = y_0.$$

Mit  $z = \frac{y}{x}$  löst man

$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{4 - 3z + z^2}{x} - \frac{z}{x} = \frac{(z-2)^2}{x}, \quad z(1) = y_0,$$

mit Separation der Variablen:

$$\frac{-1}{z-2} = \int \frac{dz}{(z-2)^2} = \int \frac{1}{x} dx + \gamma = \gamma + \ln x, \quad \frac{-1}{y_0-2} = \gamma, \quad y_0 \neq 2,$$

$$\begin{aligned} z(x) &= 2 - \frac{1}{\gamma + \ln x} = 2 - \frac{y_0 - 2}{-1 + (y_0 - 2) \ln x}, \\ y(x) &= x \cdot z(x) = 2x - \frac{(y_0 - 2)x}{-1 + (y_0 - 2) \ln x}. \end{aligned}$$

Die Lösung existiert auf dem Intervall  $(0, \exp(1/(y_0 - 2)))$ , falls  $y_0 > 2$ , bzw. auf dem Intervall  $(\exp(1/(y_0 - 2)), \infty)$ , falls  $y_0 < 2$ . Im Fall  $y_0 = 2$  (wo die Voraussetzung von (3.11) nicht erfüllt ist) erhält man  $z \equiv 2$ , also  $y(x) = 2x$  und damit ebenfalls obige Formel auf  $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ .

## §4. Existenz und Eindeutigkeit

Nun sollen Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen hergeleitet werden. Dazu werden geeignete Funktionenräume benutzt. Nach dem Reduktionssatz (2.6) genügt es, Aussagen für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung herzuleiten. Für ein nicht entartetes Intervall  $I$  betrachten wir den Vektorraum

$$\mathcal{C}_n(I) = \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n; \varphi \text{ stetig}\}.$$

In diesem Paragraphen bezeichnet  $\|\cdot\|$  stets die Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^n$ , also

$$\|y\| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}.$$

Ist  $I$  ein kompaktes Intervall, so existiert

$$\|\varphi\|_\infty := \max\{\|\varphi(t)\|; t \in I\},$$

und  $(\mathcal{C}_n(I), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein vollständiger normierter Vektorraum. In einem ersten Schritt schreiben wir die Differentialgleichung in eine Integralgleichung um.

**(4.1) Lemma.** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a \in I$  und  $(a, b) \in G$ , so ist eine Abbildung  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

auf  $I$ , wenn  $\varphi$  stetig ist und folgende Integralgleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= b_1 + \int_a^x f_1(t, \varphi(t)) \, dt \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= b_n + \int_a^x f_n(t, \varphi(t)) \, dt \end{aligned}$$

für alle  $x \in I$ . (Kurz:  $\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) \, dt$  für alle  $x \in I$ .)

Anders ausgedrückt: Betrachtet man den Operator

$$T : \mathcal{C}_n(I) \rightarrow \mathcal{C}_n(I), \quad \psi \mapsto T(\psi)$$

mit

$$T(\psi)(x) := \left( b_1 + \int_a^x f_1(t, \psi(t)) \, dt, \dots, b_n + \int_a^x f_n(t, \psi(t)) \, dt \right)^t$$

für alle  $x \in I$ , so ist  $\varphi$  genau dann eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, wenn  $T(\varphi) = \varphi$ .

**Beweis.** Löst  $\varphi$  das Anfangswertproblem, so ist für  $1 \leq i \leq n$ :

$$\begin{aligned} b_i + \int_a^x f_i(t, \varphi(t)) dt &= b_i + \int_a^x \varphi'_i(t) dt \\ &= b_i + \varphi_i(x) - \varphi_i(a) = \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Erfüllt  $\varphi$  andererseits die Integralgleichung, so folgt direkt  $\varphi(a) = b$ . Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist weiter jedes  $\varphi_i$  differenzierbar mit

$$\varphi'_i(x) = \frac{d}{dx} \left( b_i + \int_a^x f_i(t, \varphi(t)) dt \right) = f_i(x, \varphi(x))$$

für alle  $x \in I$ . □

Ein Vorteil des Lemmas besteht darin, dass wir nur noch *stetige* Lösungen der Integralgleichung finden müssen. Ein weiterer, entscheidender Vorteil ist, dass wir das Problem auf Fixpunkte von  $T$  zurückgeführt haben. Mit etwas Vorbereitung werden wir auf die Situation den BANACHSchen Fixpunktsatz anwenden können.

Einen wichtigen Begriff hierfür führen wir nun ein.

**(4.2) Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  in  $G$  einer LIPSCHITZ-Bedingung (bezüglich  $y$ ) mit der LIPSCHITZ-Konstante  $L \geq 0$  genügt, wenn

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L \cdot \|y - \bar{y}\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \bar{y}) \in G$$

gilt. Man sagt, dass  $f$  lokal einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt, wenn es zu jedem Punkt  $(a, b) \in G$  eine Umgebung  $U$  von  $(a, b)$  gibt, so dass  $f|_{G \cap U}$  einer LIPSCHITZ-Bedingung mit einer (von  $U$  abhängigen) LIPSCHITZ-Konstante  $L \geq 0$  genügt.

**(4.3) Bemerkungen.** a) Es sind mit den Bezeichnungen von (4.2) für stetiges  $f$  äquivalent:

- (i)  $f$  genügt auf  $G$  lokal einer LIPSCHITZ-Bedingung.
- (ii) Zu jedem Kompaktum  $K \subset G$  gibt es ein (von  $K$  abhängiges)  $L \geq 0$  so, dass  $f|_K$  einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante  $L$  genügt.

Dabei ist die Beweisrichtung "(ii)  $\Rightarrow$  (i)" beinahe trivial; für die umgekehrte Richtung benutze die Überdeckungseigenschaft und die Beschränktheit von  $K$ .

b) Weil auf  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{R}^m$ ) alle Normen äquivalent sind, ist die Wahl der speziellen Norm  $\|y\| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$  in Definition (4.2) unerheblich. Bei Übergang zu anderen Normen ändert sich aber i. A. die Konstante  $L$ .

Wir beschreiben nun ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung.

**(4.4) Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto f(x, y)$ , eine stetige Funktion, die in  $y = (y_1, \dots, y_n)$  stetig partiell differenzierbar ist. Dann genügt  $f$  lokal einer LIPSCHITZ-Bedingung.



**Beweis.** Sei  $(a, b) \in G$ . Weil  $G$  offen ist, existiert ein  $r > 0$  mit

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r, \|y - b\| \leq r\} \subset G.$$

Dann ist  $K$  eine kompakte und konvexe Umgebung von  $(a, b)$ . Nach Voraussetzung sind alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  stetig auf  $G$ ; für das Kompaktum  $K$  gibt es also eine Konstante  $M \geq 0$  derart, dass

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| \leq M \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und } (x, y) \in K.$$

Seien nun  $(x, y), (x, \bar{y}) \in K$ , und

$$w(s) = y + s(\bar{y} - y) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1.$$

Nach Voraussetzung ist  $(x, w(s)) \in K$  für  $0 \leq s \leq 1$ . Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} f(x, \bar{y}) - f(x, y) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, w(s)) \, ds \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, w(s)) \right)_{i,j} \cdot (\bar{y} - y) \, ds \end{aligned}$$

und es folgt mit Standard-Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|f(x, \bar{y}) - f(x, y)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, w(s)) \right| \cdot |\bar{y}_j - y_j| \, ds \\ &\leq \int_0^1 M \cdot \sum_{j=1}^n |\bar{y}_j - y_j| \, ds \\ &\leq n \cdot M \cdot \|\bar{y} - y\|. \end{aligned}$$

Mit  $L = n \cdot M$  folgt die Behauptung. □

**(4.5) Bemerkung.** Der Beweis zeigt auch: Sind alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  auf  $G$  beschränkt und ist  $G$  konvex, so genügt  $f$  auf  $G$  einer (globalen) LIPSCHITZ-Bedingung.

Nun kommen wir zu dem zentralen Satz über lokale Existenz und Eindeutigkeit.

**(4.6) Satz von PICARD-LINDELÖF.** a) Es sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante  $L > 0$ . Sei  $\varepsilon_0 := \frac{1}{2L}$ , weiter  $a \in J$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $I$  ein kompaktes Teilintervall von  $[a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0] \cap J$  mit  $a \in \overset{\circ}{I}$ . Dann existiert auf  $I$  eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = b$ .

b) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, die lokal einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt  $(a, b) \in G$  ein  $\varepsilon > 0$ , so dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

eine eindeutige Lösung  $\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt.

**Beweis.** a) Sei  $I = [a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2]$  mit  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$ . Nach (4.1) hat man alle stetigen Abbildungen  $\varphi : [a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu bestimmen, die

$$T(\varphi)(x) := b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) = \varphi(x)$$

für alle  $x$  erfüllen. Wir führen dies auf einen Fixpunkt des Operators  $T$  zurück.

Dazu betrachten wir den vollständigen normierten reellen Vektorraum

$$V := (C_n([a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2]), \|\cdot\|_\infty).$$

Für  $\varphi \in V$  ist, wie schon angemerkt,  $T(\varphi)$  wieder stetig, also  $T : V \rightarrow V$ . Für  $\varphi, \psi \in V$  und  $x \in [a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2]$  gilt

$$T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = \int_a^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt,$$

also

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \int_a^x f_j(t, \varphi(t)) - f_j(t, \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left| \int_a^x |f_j(t, \varphi(t)) - f_j(t, \psi(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^x L \cdot \|\varphi(t) - \psi(t)\| dt \right| \\ &\leq L \cdot |x - a| \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

wobei Standard-Abschätzungen für Integrale verwendet wurden.

Nach Wahl von  $\varepsilon_0$  ist  $\|T(\varphi) - T(\psi)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$  und somit  $T$  eine Kontraktion. Dann folgen Existenz und Eindeutigkeit aus dem BANACHSchen Fixpunktsatz.

b) Der Beweis ist eine Variante von a). Weil  $G$  offen ist, gibt es ein  $r > 0$  so, dass

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r, \|y - b\| \leq r\} \subset G$$

und  $f$  auf  $K$  einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante  $L > 0$  genügt. Es existiert ein  $M > 0$ , so dass

$$\|f(x, y)\| \leq M \quad \text{für alle } (x, y) \in K,$$

denn  $f$  ist stetig und  $K$  ist kompakt.

Nun setze man  $\varepsilon := \min\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M}\}$  und betrachte im vollständigen normierten Vektorraum  $V = (C_n([a - \varepsilon, a + \varepsilon]), \|\cdot\|_\infty)$  die abgeschlossene Kugel

$$D := \{\varphi \in V; \|\varphi - b\|_\infty \leq r\},$$

wobei  $b$  als konstante Funktion zu verstehen ist. Dann definiert man den Operator  $T : D \rightarrow V$  analog zu Teil a).

Für  $\varphi \in D$  und  $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  gilt dann

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - b\| &= \max \left\{ \left| \int_a^x f_j(t, \varphi(t)) dt \right|; 1 \leq j \leq n \right\} \\ &\leq |x - a| \cdot M \leq r, \end{aligned}$$

also  $\|T(\varphi) - b\|_\infty \leq r$  und somit  $T(\varphi) \in D$ . Somit  $T : D \rightarrow D$  und wie in a) ergibt sich, dass  $T$  eine Kontraktion ist. Die Behauptung folgt wieder mit dem BANACHSchen Fixpunktsatz.  $\square$

**(4.7) Bemerkung.** Der Beweis von Satz (4.6) und des BANACHSchen Fixpunktsatzes liefern eine Strategie zum iterativen Bestimmen von Näherungslösungen:  
Starte mit einer Funktion  $\varphi_0$  (etwa  $\varphi_0(x) = b$  konstant) und iteriere:  $\varphi_{k+1} = T(\varphi_k)$ . Zumindest im Fall der Existenz einer globalen LIPSCHITZ-Bedingung ist Konvergenz garantiert.

**(4.8) Beispiele.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$ .

$f$  genügt in jedem "Streifen"  $[-r, r] \times \mathbb{R}$  (wobei  $r > 0$ ) einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante  $L = r$ . Nun hat man für das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 1$$

das folgende Iterationsschema:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t \cdot \varphi_n(t) dt.$$

Also

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 + \int_0^x t dt = 1 + \frac{x^2}{2}; \\ \varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x t + \frac{t^3}{2} dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}; \\ \varphi_3(x) &= 1 + \int_0^x t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{8} dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} \end{aligned}$$

und mit Induktion erhält man

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{2^k \cdot k!}$$

und die (auch mit (3.1) oder (3.4) bestimmbare) Lösung

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

Das nächste Ziel ist, die lokalen Aussagen auszuweiten. Ein Hilfsmittel hierfür ist:

**(4.9) Lemma.** (Zusammensetzen von Lösungen) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $(a, b) \in G$ . Die Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung.

a) Sei  $x_1 > a$ , die stetige Funktion  $\varphi : [a, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei auf  $[a, x_1]$  Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = b$ , und  $(x_1, \varphi(x_1)) \in G$ . Dann ist  $\varphi$  auch auf  $[a, x_1]$  Lösung des Anfangswertproblems und es gibt ein  $\varepsilon > 0$  sowie eine Lösung  $\tilde{\varphi} : [a, x_1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems mit  $\tilde{\varphi}|_{[a, x_1]} = \varphi$ .

b) Sei  $x_2 < a$ , die stetige Funktion  $\psi : [x_2, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei auf  $[x_2, a]$  Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = b$ , und  $(x_2, \psi(x_2)) \in G$ . Dann ist  $\psi$  auch auf  $[x_2, a]$  Lösung des Anfangswertproblems und es gibt ein  $\varepsilon > 0$  sowie eine Lösung  $\tilde{\psi} : [x_2 - \varepsilon, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems mit  $\tilde{\psi}|_{[x_2, a]} = \psi$ .

**Beweis.** Gezeigt wird a); der Beweis von b) läuft analog. Nach Lemma (4.1) gilt

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(s, \varphi(s)) ds$$

für  $a \leq x < x_1$ . Weil  $\varphi$  stetig ist, gilt dies auch noch für  $x = x_1$ . Die Differentialgleichung ist also (für die einseitige Ableitung) auch noch für  $x = x_1$  erfüllt.

Nach Satz (4.6) gibt es nun zum Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_1) = \varphi(x_1)$  ein  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutige Lösung  $\gamma$  auf  $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ . Definiert man nun die stetige Funktion  $\tilde{\varphi} : [a, x_1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } a \leq x \leq x_1 \\ \gamma(x) & \text{für } x_1 < x \leq x_1 + \varepsilon \end{cases} \quad \square$$

so löst  $\tilde{\varphi}$  die Differentialgleichung in  $[a, x_1 + \varepsilon]$ . Für  $x \neq x_1$  ist dies klar, für  $x = x_1$  beachte, dass  $\tilde{\varphi}$  links- und rechtsseitig differenzierbar ist und dass beide einseitigen Ableitungen gleich  $f(x_1, \varphi(x_1))$  sind. (Wir benutzen hier folgende Aussage aus der Analysis: Ist  $\psi$  in einer punktierten Umgebung von  $x_1$  stetig differenzierbar und in  $x_1$  stetig und existieren die beiden einseitigen Ableitungen in  $x_1$  und sind gleich, so ist  $\psi$  in  $x_1$  differenzierbar,  $\psi'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \psi'(x)$ . Dies ist eine Konsequenz des Mittelwertsatzes.)

Als erste Anwendung formulieren wir eine stärkere Eindeutigkeitsaussage.

**(4.10) Korollar.** (Eindeutigkeitssatz) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, die lokal einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und seien  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = f(x, y).$$

Gibt es ein  $x_0 \in I$  mit  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ , so gilt schon

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

**Beweis.** Wäre die Aussage nicht richtig, so gäbe es etwa (um einen Fall zu diskutieren) ein  $x^* > x_0$  mit  $\varphi(x^*) \neq \psi(x^*)$ . Nun setzt man

$$x_1 := \inf\{x^* > x_0; \varphi(x^*) \neq \psi(x^*)\}.$$

Es gilt  $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ , denn wegen der Stetigkeit von  $\varphi - \psi$  gäbe es ansonsten eine Umgebung von  $x_1$ , auf der  $\varphi - \psi$  nicht verschwindet, im Widerspruch zur Definition von  $x_1$ . Wegen (4.6) gibt es dann aber eine Umgebung von  $x_1$ , auf der  $\varphi = \psi$  gilt. Das ist ein erneuter Widerspruch.  $\square$

**(4.11) Satz.** Es sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall,  $G = J \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung auf  $G$  mit Konstante  $L > 0$ . Dann hat für alle  $(a, b) \in G$  das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = b$  eine eindeutige Lösung, die auf ganz  $J$  existiert.

**Beweis.** Die Eindeutigkeit folgt aus (4.10). Für die Existenz beachte, dass es nach (4.6) a) ein  $\varepsilon_0 > 0$  gibt, so dass für jeden Anfangswert  $(x_0, y_0)$  die Existenz einer Lösung auf  $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \cap J$  garantiert ist. Lemma (4.9) und Induktion nach  $k \in \mathbb{N}$  zeigen nun die Existenz einer Lösung auf  $[x_0 - k \cdot \varepsilon_0, x_0] \cap J$  und auf  $[x_0, x_0 + k \cdot \varepsilon_0] \cap J$  für alle  $k$ . Das war zu zeigen.  $\square$

**(4.12) Satz.** (Fortsetzbarkeit von Lösungen) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und die stetige Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung. Ist  $\varphi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ , welche ganz in einer kompakten Teilmenge  $K$  von  $G$  verläuft, so gibt es ein  $r > 0$  und eine Lösung  $\psi : [x_0, x_1 + r] \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Gleichung derart, dass  $\psi|_{[x_0, x_1]} = \varphi$ .

**Beweis.** Sei  $f = (f_1, \dots, f_n)^t$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^t$ . Dann ist jedes  $f_i$  auf  $K$  beschränkt, also gibt es ein  $R > 0$  derart, dass

$$|f_i(x, y)| \leq R \quad \text{für alle } (x, y) \in K, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$  fest. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt für alle  $u, v \in [x_0, x_1]$  nun

$$|\varphi_i(v) - \varphi_i(u)| = |\varphi_i'(\xi)| \cdot |v - u| = |f_i(\xi, \varphi(\xi))| \cdot |v - u|$$

für ein  $\xi$  zwischen  $u$  und  $v$ , also

$$|\varphi_i(v) - \varphi_i(u)| \leq R \cdot |v - u|.$$

Ist also  $(z_k)_{k \geq 1}$  eine Folge in  $[x_0, x_1]$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x_1$ , so ist deshalb  $(\varphi_i(z_k))_{k \geq 1}$  eine CAUCHY-Folge und somit konvergent. Ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_i(z_k) = c_i$  und ist  $(\tilde{z}_k)_{k \geq 1}$  eine weitere solche Folge, so folgt auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_i(\tilde{z}_k) = c_i$  durch Betrachten der "gemischten" Folge

$$z_k^* := \begin{cases} \tilde{z}_{k/2}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ z_{(k+1)/2}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also ist durch

$$\varphi_i^* : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \varphi_i(x), & \text{falls } x < x_1, \\ c_i, & \text{falls } x = x_1, \end{cases}$$

eine stetige Funktion wohldefiniert und  $\varphi$  lässt sich so zu einer stetigen Funktion  $\varphi^*$  auf  $[x_0, x_1]$  fortsetzen. Nun zeigt Anwenden von (4.9) die Behauptung.  $\square$

**(4.13) Bemerkung.** Eine entsprechende Aussage gilt natürlich für Fortsetzungen von Lösungen auf  $(x_2, x_0]$  mit  $x_2 < x_0$ .

**(4.14) Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und die stetige Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung.

a) Dann gibt es für jedes  $(a, y_0) \in G$  zum Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0$$

ein offenes Intervall  $J$  mit  $a \in J$  und eine Lösung  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  derart, dass für jede weitere Lösung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $I$  Intervall mit  $a \in I$ ) des Anfangswertproblems gilt:

$$I \subset J \quad \text{und} \quad \psi = \varphi|_I.$$

b) Der Graph von  $\varphi$  kommt dem Rand von  $G$  in folgendem Sinn beliebig nahe: Keine der Mengen

$$\gamma^+ := \{(x, \varphi(x)); x \in J \text{ und } x \geq a\}, \quad \gamma^- := \{(x, \varphi(x)); x \in J \text{ und } x \leq a\}$$

ist in einer kompakten Teilmenge von  $G$  enthalten.

**Beweis.** a) Ist  $M$  eine Indexmenge und ist für jedes  $\alpha \in M$  ein Intervall  $I_\alpha$  mit  $a \in I_\alpha$  und eine Lösung  $\varphi_\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems gegeben, so setze man

$$J := \bigcup_{\alpha \in M} I_\alpha, \quad \varphi : \bigcup_{\alpha \in M} I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) := \varphi_\beta(x), \quad \text{falls } x \in I_\beta.$$

Dies ist wegen der Eindeutigkeitsaussage (4.10) wohldefiniert und löst die Differentialgleichung.

Deshalb gibt es ein maximales Intervall  $J$  und eine Lösung  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie behauptet. Zu zeigen bleibt die Offenheit von  $J$ . Wäre  $J$  nicht offen, so gäbe es etwa (um einen Fall zu diskutieren) ein  $b > a$  mit  $J \cap [a, \infty) = [a, b]$ . Es gilt  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  auch noch für  $x = b$ , und eine Umgebung von  $(b, \varphi(b))$  ist noch in  $G$  enthalten. Lemma (4.9) zeigt nun, dass  $\varphi$  zu einer Lösung auf  $[a, b+r]$  mit einem  $r > 0$  fortsetzbar ist. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $J$ .

b) Die Behauptung folgt sofort aus (4.12). □

Mit Hilfe von (2.6) kann man (4.6) bis (4.14) sofort auf Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung übertragen.

**(4.15) Korollar.** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die lokal einer LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Zu jedem Punkt  $(a, b_0, \dots, b_{n-1}) \in G$  gibt es dann ein maximales offenes Intervall  $J$  mit  $a \in J$ , so dass das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt. Für jede weitere Lösung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dieses Anfangswertproblems gilt

$$I \subset J \quad \text{und} \quad \varphi|_I = \psi.$$

**(4.16) Beispiele.** a) Separation der Variablen: Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  nicht entartete Intervalle und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann besitzt jedes Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

mit  $(x_0, y_0) \in I \times J$  nach (4.14) eine eindeutige Lösung, denn  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  genügt wegen der stetigen Differenzierbarkeit von  $g$  und (4.4) einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung. Ist  $g(y_0) \neq 0$ , so lässt sich die Lösung gemäß (3.1) bestimmen; für  $g(y_0) = 0$  ist die Lösung durch die Funktion mit konstantem Wert  $y_0$  gegeben.

b) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y$$

hat natürlich  $\sin x$  und  $\cos x$  als Lösungen. Eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta,$$

ist offenbar

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

Die durch  $f(x, y_1, y_2) = -y_1$  gegebene Funktion genügt auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  einer LIPSCHITZ-Bedingung mit  $L = 1$ . Nach (4.15) ist die Lösung daher eindeutig bestimmt. Also werden auf diese Weise alle Lösungen der Differentialgleichung  $y'' = -y$  gegeben.

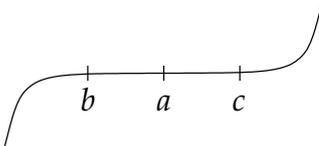
c) Wir betrachten  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}$ , ist stetig, genügt aber keiner lokalen LIPSCHITZ-Bedingung um  $(0, 0)$ . Die Differentialgleichung

$$y' = 3y^{2/3}$$

hat  $\phi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ , sowie  $\psi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - a)^3, a \in \mathbb{R}$ , als Lösungen. Wegen  $\phi_0(a) = \psi_a(a) = 0$  hat das Anfangswertproblem

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(a) = 0,$$

keine eindeutige Lösung. Jede Funktion der Gestalt

$$\psi(x) = \begin{cases} (x - b)^3 & \text{für } x \leq b, \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq c, \\ (x - c)^3 & \text{für } c \leq x, \end{cases}$$


wobei  $b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  mit  $b \leq a \leq c$ , ist eine Lösung des Anfangswertproblems. Die Funktion  $f$  ist in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  stetig partiell differenzierbar, nicht aber in  $(a, 0), a \in \mathbb{R}$ .

Schließlich erwähnen wir einen allgemeinen Existenzsatz, der hier nicht bewiesen werden soll.

**(4.17) Satz von PEANO.** a) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  existiert eine Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

auf einem offenen Intervall  $J$  mit  $x_0 \in J$  derart, dass keine Fortsetzung von  $\varphi$  zu einer Lösung auf einem Intervall  $\tilde{J} \not\supseteq J$  existiert. Der Graph von  $\varphi$  kommt im Sinne von (4.14) dem Rand von  $G$  beliebig nahe.

b) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Zu jedem Punkt  $(x_0, b_0, \dots, b_{n-1}) \in G$  existiert eine Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = b_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

auf einem offenen Intervall  $J$  mit  $x_0 \in J$  derart, dass keine Fortsetzung von  $\varphi$  zu einer Lösung auf einem Intervall  $\tilde{J} \not\supseteq J$  existiert. Der Graph von  $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})^t$  kommt im Sinne von (4.14) dem Rand von  $G$  beliebig nahe.

## §5. Erste Anwendungen auf autonome Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir autonome Differentialgleichungen erster Ordnung näher betrachten.

Es sei also  $U \subset \mathbb{R}^n$  nichtleer und offen und die stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, y \mapsto f(y)$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung. (Die Stetigkeit bräuchte man hier nicht explizit voraus zu setzen, sie folgt in der gegebenen Situation aus der LIPSCHITZ-Bedingung.)

Nutzen wir nun die Ergebnisse des vorangegangenen Paragraphen für autonome Gleichungen.

**(5.1) Definition.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und die stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung; weiter sei  $z \in U$ .

- Das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems  $y' = f(y), y(0) = z$  (gemäß (4.14)) wird mit  $I_{\max}(z)$  bezeichnet. Die Lösung bezeichnet man mit  $\Phi(x, z)$ ; man nennt sie auch den *lokalen Fluss* des Vektorfeldes  $f$  durch  $z$ .
- Die Menge  $\{\Phi(x, z); x \in I_{\max}(z)\}$  heißt *Lösungsbahn* oder *Trajektorie* durch  $z$ .
- Man nennt  $z$  einen *stationären Punkt* der Differentialgleichung, wenn  $\Phi(x, z) = z$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , die Lösung also eine konstante Funktion von  $x$  ist.

**(5.2) Bemerkung.** Ein Punkt  $z \in U$  ist genau dann stationär, wenn  $f(z) = 0$ . Eine Richtung folgt durch Einsetzen in die Gleichung, die andere durch Einsetzen und die Eindeutigkeitsaussage in (4.14).

Dass der Anfangspunkt  $x = 0$  in (5.1) scheinbar bevorzugt wird, hat folgenden Grund.



**(5.3) Lemma.** Es seien  $U, f$  und  $z$  wie in (5.1); weiter  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = z$$

ist dann gegeben durch  $\Phi(x - x_0, z)$ .

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, z) = f(\Phi(x, z))$$

erfüllt. Mit der Kettenregel (und  $\frac{d}{dx}(x - x_0) = 1$ ) folgt sofort

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x - x_0, z) = f(\Phi(x - x_0, z)),$$

also ist  $\psi(x) = \Phi(x - x_0, z)$  Lösung von  $y' = f(y)$ . Weiter ist  $\psi(x_0) = \Phi(0, z) = z$ ; damit ist der Anfangswert wie gewünscht.  $\square$

Die "Verschiebungseigenschaft" aus (5.3) erlaubt es, viele Aussagen nur für den Anfangswert  $z$  bei  $x = 0$  zu formulieren, ohne dadurch einen Informationsverlust zu erleiden. Sie ist aber auch anderweitig nützlich.

Nun betrachten wir eine Konsequenz von (4.14), Teil b):

**(5.4) Satz.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und die stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung; weiter sei  $z \in U$ . Gibt es ein Kompaktum  $K \subset U$  mit

$$\Phi(x, z) \in K \quad \text{für alle } x \in I_{\max}(z), \quad x \geq 0$$

(bzw.  $\Phi(x, z) \in K$  für alle  $x \in I_{\max}(z)$ ,  $x \leq 0$ ), so ist

$$I_{\max}(z) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$$

(bzw.  $I_{\max}(z) \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$ ).

**Beweis.** Es reicht, eine der Behauptungen zu zeigen. Wäre etwa  $I_{\max}(z) \cap [0, \infty) = [0, b)$  mit einem  $b \in \mathbb{R}$ , so wäre  $\{(x, \Phi(x, z)); x \in I_{\max}(z) \text{ und } x \geq 0\}$  in der kompakten Teilmenge  $[0, b] \times K$  von  $\mathbb{R} \times U$  enthalten, im Widerspruch zu (4.14).  $\square$

Eine direkte Anwendung davon ist der

**(5.5) Satz.** (Theorie eindimensionaler autonomer Differentialgleichungen) Es sei  $U \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und die stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung.

a) Ist  $z \in U$  mit  $f(z) > 0$  [bzw.  $f(z) < 0$ ], so ist  $x \mapsto \Phi(x, z)$  streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend]. Nichtkonstante Lösungen sind also streng monoton.

b) Ist  $f(z) > 0$  und gibt es in  $(z, \infty) \cap U$  einen stationären Punkt  $w$ , so auch einen kleinsten stationären Punkt  $z^*$  und  $\Phi(x, z)$  existiert auf  $[0, \infty)$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, z) = z^*$ .

Gibt es in  $(-\infty, z) \cap U$  einen stationären Punkt, so auch einen größten stationären Punkt  $z_*$ , und  $\Phi(x, z)$  existiert auf  $(-\infty, 0]$  mit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x, z) = z_*$ .

c) Analoge Aussagen gelten mit offensichtlichen Änderungen für  $f(z) < 0$ .

**Beweis.** a) Würde für  $\varphi(x) := \Phi(x, z)$  gelten, dass  $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$  sein Vorzeichen wechselt oder Null wird, so gäbe es ein  $x^*$  mit  $f(\varphi(x^*)) = 0$ . Dann sind aber  $\varphi$  und die konstante Funktion  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x^*)$ , verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems  $y' = f(y)$ ,  $y(x^*) = \varphi(x^*)$ , im Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage.

b) Es reicht, den ersten Teil der Aussage zu beweisen. Die Existenz von  $z^*$  folgt aus der Abgeschlossenheit der Nullstellenmenge von  $f$ . Weil  $\varphi(x) \in [z, z^*]$  für alle  $x > 0$  (denn nach a) gilt  $\varphi(x) \neq z^*$  für alle  $x$ ) und  $[z, z^*] \subset U$  kompakt ist, existiert  $\varphi(x)$  für alle  $x > 0$  nach (5.4) und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$  existiert nach dem Monotoniekriterium. Weil  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(\varphi(x))$  existieren, gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 0$ : Wäre etwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = c > 0$ , so gäbe es ein  $\bar{x}$  mit  $\varphi'(x) \geq \frac{c}{2}$  für alle  $x > \bar{x}$ . Mit dem Mittelwertsatz folgte für alle  $x_2 > x_1 \geq \bar{x}$ :

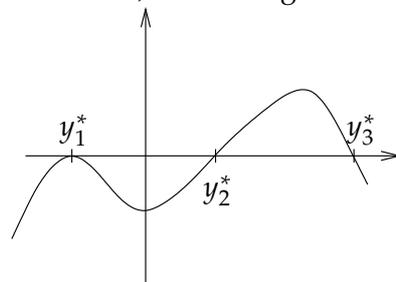
$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq \frac{c}{2} \cdot (x_2 - x_1)$$

im Widerspruch zur Beschränktheit von  $\varphi$ .

Also ist  $f(\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)) = 0$  und deshalb  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = z^*$ . □

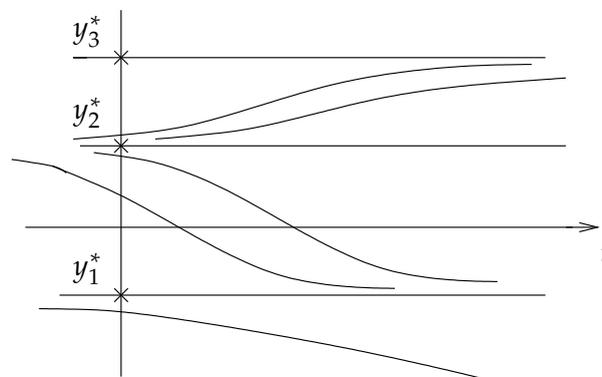
**(5.6) Beispiele.** a) Es ist sinnvoll, die Aussage mit Bildern zu illustrieren.

Graph von  $f$ :



(Wichtig sind Nullstellen und Vorzeichen; sie bestimmen das Monotonieverhalten der Lösungen)

Verhalten der Lösungen:



Insbesondere existieren Lösungen mit einem Anfangswert aus  $[y_1^*, y_3^*]$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .

b) Logistisches Wachstum: Es seien  $r > 0$  und  $K > 0$  Konstanten und gegeben die Gleichung

$$\dot{y} = ry(K - y) =: f(y) \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung wird u. a. verwendet, um das gebremste Wachstum einer Population mathematisch zu beschreiben. Sie lässt sich nach (3.1) explizit lösen (ein Spezialfall findet sich in (3.3) c), aber der Überblick, den (5.5) vermittelt, ist trotzdem sehr nützlich: Die Gleichung besitzt die stationären Punkte  $z_0 = 0$  und  $z_1 = K$ ; es ist  $f(y) > 0$  für  $y \in (z_0, z_1)$  und  $f(y) < 0$  für  $y \notin [z_0, z_1]$ .

Also: Alle Lösungen mit Anfangswert  $z \in (z_0, z_1)$  sind streng monoton wachsend, mit Grenzwert  $z_1$ ; alle Lösungen mit Anfangswert  $z > z_1$  fallen streng monoton, mit Grenzwert  $z_1$ . Biologisch gesagt: Die Populationsgröße konvergiert stets gegen den Gleichgewichtszustand  $K$ . (Anfangswerte  $z < 0$  sind biologisch irrelevant.)

c) Auch auf die Gleichung

$$y' = \sin(y^2) = f(y) \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

lässt sich grundsätzlich (3.1) anwenden. Jedoch sind die entstehenden Integrale nicht mehr elementar auszuwerten. Das qualitative Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung ist aber einfach zu verstehen: Stationäre Punkte liegen bei  $\pm\sqrt{k \cdot \pi}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ; und das Vorzeichen von  $f$  zwischen zwei solchen ist bekannt.

Schließlich wollen wir Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen noch für strukturelle Eigenschaften autonomer Gleichungen nutzen.

**(5.7) Satz.** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und die stetige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung. Dann gelten:*

(a) *Lokale Halbgruppen-Eigenschaft: Es gilt für alle  $z \in U$ , dass  $\Phi(0, z) = z$  und weiter*

$$\Phi(x + x^*, z) = \Phi(x, \Phi(x^*, z))$$

*für alle  $x, x^* \in \mathbb{R}$ , für die die rechte Seite existiert, oder für die  $\Phi(x + x^*, z)$  und  $\Phi(x^*, z)$  existieren.*

(b) *Verschiedene Lösungsbahnen sind disjunkt: Gibt es  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  und  $z_1, z_2 \in U$  derart, dass  $\Phi(x_1, z_1) = \Phi(x_2, z_2)$ , so ist  $z_2 = \Phi(x_1 - x_2, z_1)$ . Also liegen  $z_1$  und  $z_2$  in der selben Lösungsbahn.*

(c) *Geschlossene Lösungsbahnen: Gibt es ein  $x^* \neq 0$  und ein  $z \in U$  mit  $\Phi(x^*, z) = z$ , dann existiert  $\Phi(x, z)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und es gilt  $\Phi(x + x^*, z) = \Phi(x, z)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . (Die Lösung ist periodisch und die Lösungsbahn geschlossen.)*

**Beweis.** (a)  $\Phi(0, z) = z$  gilt nach Definition. Wie in Lemma (5.3) folgt, dass  $\Phi(x + x^*, z)$  eine Lösung der Gleichung ist; und der Anfangswert bei  $x = 0$  ist  $\Phi(x^*, z)$ . Die Behauptung folgt aus dem Eindeutigkeitsatz.

(b) Aus  $\Phi(x_1, z_1) = \Phi(x_2, z_2)$  und (a) folgt

$$z_2 = \Phi(0, z_2) = \Phi(-x_2, \Phi(x_2, z_2)) = \Phi(-x_2, \Phi(x_1, z_1)) = \Phi(x_1 - x_2, z_1).$$

(c) Es sei etwa  $x^* > 0$ . Für  $0 \leq x \leq x^*$  gilt dann mit (a)

$$(*) \quad \Phi(x, z) = \Phi(x, \Phi(x^*, z)) = \Phi(x + x^*, z)$$

Also existiert  $\Phi(x, z)$  für  $0 \leq x \leq 2x^*$ .

Mit Induktion zeigt man analog, dass für alle ganzen  $k > 0$  die Lösung für  $0 \leq x \leq k \cdot x^*$  existiert und die Gleichung (\*) erfüllt. Weiter hat man für  $x^* \leq x \leq 2x^*$  auch

$$\Phi(x - x^*, z) = \Phi(x - x^*, \Phi(x^*, z)) = \Phi(x, z),$$

und daraus ergibt sich mit Induktion die Existenz der Lösung und die Gültigkeit von (\*) für alle reellen  $x \leq 0$ .  $\square$

**(5.8) Beispiel.** Die autonome Gleichung

$$y' = f(y) := \begin{pmatrix} y_1 - y_2 - (y_1^2 + y_2^2)y_1 \\ y_1 + y_2 - (y_1^2 + y_2^2)y_2 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

besitzt die Lösung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ , wie man durch Einsetzen leicht verifiziert. Also ist der Kreis um 0 mit Radius 1 eine Lösungsbahn. Nun wenden wir (5.7) an: Nach Teil (b) schneidet eine Lösungsbahn mit Anfangswert innerhalb oder außerhalb dieses Kreises den Kreis nicht. Liegt der Anfangswert  $z$  innerhalb dieses Kreises, so bleibt die Lösung also für alle  $x \in I_{\max}(z)$  im Kompaktum  $K = \{y; y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$ . Aus Satz (5.4) ergibt sich  $I_{\max}(z) = \mathbb{R}$ . Lösungen, die im Inneren des Kreises starten, existieren für alle  $x$ . Wir haben ohne explizite Kenntnis dieser Lösungen ihr maximales Existenzintervall bestimmt!

Auf weitere Anwendungen werden wir später zurückkommen.

## §6. Potenzreihenentwicklungen für Lösungen

Wir betrachten (der Einfachheit halber) in diesem Abschnitt eine gewöhnliche Differentialgleichung in einer reellen abhängigen Variablen:

$$y' = f(x, y); \quad f \text{ definiert auf der offenen Menge } G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Weitere Eigenschaften von  $f$  werden im Folgenden noch festgelegt. Es geht uns um Potenzreihenentwicklungen für Lösungen.

**(6.1) Beispiel.** Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Für die Lösung ergibt der Potenzreihenansatz

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

mit unbestimmten Koeffizienten (und hoffentlich positivem Konvergenzradius) zunächst  $a_0 = 0$  wegen der Anfangsbedingung. Weiter ist

$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + \dots$$

und mit dem CAUCHY-Produkt für Potenzreihen ergibt sich

$$\varphi(x)^2 = a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x^5 + (2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) x^6 \dots$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt nun Folgendes:

$$\begin{aligned} \underline{x^0}: & a_1 = 0 \\ \underline{x^1}: & 2a_2 = 0 \implies a_2 = 0 \\ \underline{x^2}: & 3a_3 = 1 + a_1^2 \implies a_3 = \frac{1}{3} \\ \underline{x^3}: & 4a_4 = 2a_1 a_2 \implies a_4 = 0 \\ \underline{x^4}: & 5a_5 = 2a_1 a_3 + a_2^2 \implies a_5 = 0 \\ \underline{x^5}: & 6a_6 = 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 \implies a_6 = 0 \\ \underline{x^6}: & 7a_7 = 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2 \implies a_7 = \frac{1}{63} \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

und so weiter. In diesem Beispiel ist klar, dass der Koeffizientenvergleich ein Rekursionschema für die Koeffizienten  $a_j$  liefert; man scheint damit eine Methode zur näherungsweise Bestimmung einer Lösung zu haben. Unklar sind aber Konvergenzfragen.

Zunächst ist aber zu klären, für welche Differentialgleichungen (also für welche rechten Seiten) ein Potenzreihenansatz für die Lösung überhaupt sinnvoll ist. Hierzu brauchen wir einen Steilkurs zu Mehrfachreihen und Potenzreihen in mehreren Variablen.

**(6.2) Definition.** Es seien  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  für  $i, j \in \mathbb{N}_0$  gegeben.

(a) Für eine endliche Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  nennt man

$$S_M := \sum_{(i,j) \in M} a_{ij}$$

die zu  $M$  gehörige Partialsumme.

(b) Die *Doppelreihe*  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$  ist die Familie  $(S_M)_{M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$  endlich aller Partialsummen.

(c) Die Doppelreihe heißt *absolut konvergent*, wenn es eine Bijektion  $\tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  gibt, so dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$  absolut konvergiert. Der Grenzwert wird dann ebenfalls mit  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$  bezeichnet.

**(6.3) Bemerkungen.** (a) Der Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen zeigt, dass die Definition in (6.2) (c) nicht von der Wahl der Bijektion abhängt.

(b) Man verifiziert

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}| = \sup \left\{ \sum_{(i,j) \in M} |a_{ij}|; M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ endlich} \right\}.$$

Damit folgt

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{ij}| = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| \right)$$

und auch

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right),$$

falls die Doppelreihe absolut konvergiert.

- (c) Es gibt keinen universellen Begriff für bedingte Konvergenz bei Doppelreihen, weil es auf  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  keine ausgezeichnete Anordnung gibt.

**(6.4) Beispiel.** Die geometrische Reihe

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q^i r^j$$

ist für  $|q| < 1$  und  $|r| < 1$  absolut konvergent mit Reihenwert  $\frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-r}$ . Denn für jedes endliche  $M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  ist

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in M} |q|^i |r|^j &\leq \sum_{j:(i,j) \in M} |r|^j \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |q|^l \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |r|^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |q|^l = \frac{1}{1-|r|} \cdot \frac{1}{1-|q|}. \end{aligned}$$

Also existiert das Supremum.

**(6.5) Definition.** (a) Gegeben seien  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  sowie  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  für alle  $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ . Dann heißt

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

eine *Potenzreihe* in den Variablen  $x$  und  $y$ .

(b) Es sei

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \text{ konvergiert absolut} \right\}.$$

Das Innere  $\overset{\circ}{\Delta}$  von  $\Delta$  heißt *Konvergenzgebiet* der Potenzreihe.

(c) Die Potenzreihe  $\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$  heißt *majorisierende Reihe* von  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$ , falls  $|a_{ij}| \leq A_{ij}$  für alle  $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

(d) Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , die auf einer offenen Teilmenge  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definiert ist, heißt *analytisch*, wenn  $f$  in einer Umgebung jedes Punktes  $(x_0, y_0) \in G$  durch eine Potenzreihe mit nicht leerem Konvergenzgebiet dargestellt werden kann.

Das Gegenstück zur Theorie von Potenzreihen in einer Variablen ist das folgende

**(6.6) Lemma.** Die Potenzreihe  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$  sei konvergent in  $(x_1, y_1)$  mit  $x_1 \neq x_0$ ,  $y_1 \neq y_0$ . Dann gilt: Für alle  $\rho \in (0, 1)$  ist

$$K_\rho := \{(x, y); |x - x_0| \leq \rho \cdot |x_1 - x_0| \text{ und } |y - y_0| \leq \rho \cdot |y_1 - y_0|\}$$

im Konvergenzgebiet der Reihe enthalten und die Potenzreihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf  $K_\rho$ .

**Beweis.** Sei  $r := |x_1 - x_0|$ ,  $s := |y_1 - y_0|$ .

Weil  $\sum a_{ij}r^i s^j$  absolut konvergiert, gibt es ein  $C > 0$  so, dass  $|a_{ij}|r^i s^j \leq C$  für alle  $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ . Für jede endliche Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  ist also, falls  $(x, y) \in K_\rho$ :

$$\begin{aligned} & \sum_M |a_{ij}| \cdot |x - x_0|^i |y - y_0|^j \\ &= \sum_M |a_{ij}| r^i s^j \left| \frac{x - x_0}{r} \right|^i \cdot \left| \frac{y - y_0}{s} \right|^j \\ &\leq C \cdot \sum_M \rho^{i+j} \leq C \cdot \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgen alle Behauptungen. □

Die "großen" Sätze für Potenzreihen in zwei Variablen sollen ohne Beweis angegeben werden. Sie entsprechen offensichtlich bekannten Sätzen für Potenzreihen in einer Variablen; es gibt naheliegende (und richtige) Verallgemeinerungen für mehr als zwei Variablen.

**(6.7) Satz.** Es sei  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$  eine Potenzreihe mit nichtleerem Konvergenzgebiet  $\overset{\circ}{\Delta}$ . Dann ist durch

$$f : \overset{\circ}{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{i,j} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

eine analytische Funktion definiert. Insbesondere ist  $f$  stetig und stetig partiell differenzierbar; die partiellen Ableitungen sind durch "termweises Differenzieren", also

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum i a_{ij}(x-x_0)^{i-1}(y-y_0)^j; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum j a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^{j-1}$$

gegeben; die Reihen konvergieren ebenfalls auf  $\overset{\circ}{\Delta}$ .

Das Einsetzen von Potenzreihen ineinander ist für uns wesentlich. Der Einfachheit halber setzen wir  $x_0 = y_0 = 0$ .

**(6.8) Lemma.** Es sei  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j$  eine Potenzreihe mit nichtleerem Konvergenzgebiet, welche die Funktion  $f$  definiert. Weiter sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe in einer Variablen mit positivem Konvergenzradius, welche die Funktion  $g$  definiert und es sei  $g(0) = c_0 = 0$ . Dann wird in einer Nullumgebung durch  $h(x) := f(x, g(x))$  eine analytische Funktion definiert; ihre Reihenentwicklung ist

gegeben durch

$$h(x) = a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^m a_{m-l,l} \left( \sum_{r=0}^l \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_r): \\ k_1 + \dots + k_r = l}} c_{k_1} \cdots c_{k_r} \right) \right) x^m.$$

Insbesondere ist also der Koeffizient von  $x^m$  in dieser Reihendarstellung ein Polynom in (endlich vielen)  $a_{ij}$  und  $c_k$  mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten.

**Beweis** (teilweise): Es soll die Herkunft der Koeffizienten geklärt werden. Mit dem CAUCHY-Produkt aus Analysis I ist

$$g(x)^l = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_l): \\ i_1 + \dots + i_l = k}} c_{i_1} \cdots c_{i_l} \right) x^k,$$

wobei die Reihe den selben Konvergenzradius besitzt wie diejenige für  $g$ . Man setzt nun diese Ausdrücke in die Reihe von  $h$  ein und sortiert nach Potenzen von  $x$ . Die Bedingung  $g(0) = 0$  garantiert, dass für jede Potenz  $x^m$  nur endlich viele Summanden beim Koeffizienten auftreten. Konvergenz lässt sich mit mehr oder minder elementaren Abschätzungen zeigen.  $\square$

**(6.9) Bemerkung.** Etwas einfacher ist das Einsetzen von Potenzreihen in einer Variablen ineinander, das vielleicht aus der Analysis bekannt ist: Sind

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius, welche Funktionen  $f$  bzw.  $g$  einer Veränderlichen definieren, und ist weiter  $g(0) = c_0 = 0$ , so wird durch

$$h(x) := f(g(x))$$

eine analytische Funktion einer Veränderlichen definiert; Ihre Reihenentwicklung ist gegeben durch

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^m a_l \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_l): \\ i_1 + \dots + i_l = m}} c_{i_1} \cdots c_{i_l} \right) x^m.$$

Nun zu Differentialgleichungen. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

wobei  $f$  auf der offenen Teilmenge  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  analytisch ist, und  $(a, b) \in G$ .

Zur technischen Vereinfachung folgendes selbsterklärende



**(6.10) Lemma.** Es ist  $\psi$  eine Lösung von (1) genau dann, wenn

$$\varphi(x) := \psi(x+a) - b$$

das Anfangswertproblem

$$y' = \hat{f}(x, y) := f(x+a, y+b), \quad y(0) = 0$$

löst.

Deshalb kann man sich im Folgenden auf das spezielle Anfangswertproblem (1) mit  $(0, 0) \in G$  und  $y(0) = 0$  beschränken.

**(6.11) Satz.** Das Anfangswertproblem (1) besitzt in einer Umgebung von  $a$  eine (eindeutige) analytische Lösung.

**Beweis.** Es sei  $(a, b) = (0, 0)$  und  $f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j$ . Man macht den Ansatz

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k, \quad \text{mit } v_0 = 0.$$

- (i) Nimmt man zunächst an, dass eine solche Lösung mit positivem Konvergenzradius existiert, dann ergibt  $\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v_{k+1}x^k$  sowie Einsetzen mit Lemma (6.8) für alle  $m \geq 0$ :

$$(m+1)v_{m+1} = \sum_{l=0}^m a_{m-l,l} \left( \sum_{r=0}^l \sum_{k_1+\dots+k_r=l} v_{k_1} \cdots v_{k_r} \right).$$

Weil auf der rechten Seite nur  $v_j$  mit  $j \leq m$  auftreten, hat man eine Rekursionsformel zur Berechnung von  $v_{m+1}$ . Mit Induktion erhält man weiter aus (6.8):

Für jedes  $m \geq 0$  gibt es ein Polynom  $Q_{m+1}$  in  $a_{ij}$  mit  $i \leq m, j \leq m$ , mit nichtnegativen rationalen Koeffizienten, so dass

$$v_{m+1} = Q_{m+1}(\{a_{ij}\}).$$

Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Potenzreihe gezeigt. Es bleibt die Konvergenzfrage.

- (ii) Ist  $\sum A_{ij} x^i y^j$  eine majorisierende Reihe für  $\sum a_{ij} x^i y^j$  und wird  $\sum V_k x^k$  definiert durch

$$V_0 = 0, \quad V_{m+1} = Q_{m+1}(\{A_{ij}\}),$$

so ist dies eine majorisierende Reihe für  $\sum v_k x^k$ , wie in (i) gezeigt wurde. Findet man also für eine geeignete majorisierende Reihe von  $\sum a_{ij} x^i y^j$  zum Anfangswertproblem eine analytische Lösung, so gilt die Analytizität auch für die Lösung des ursprünglichen Problems.

(iii) Nach (6.6) gibt es  $C > 0$ ,  $\rho > 0$ , so dass  $|a_{ij}| \leq \frac{C}{\rho^{i+j}}$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}_0$ .

Setze also  $A_{ij} = \frac{C}{\rho^{i+j}}$  und

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= \sum \frac{C}{\rho^{i+j}} x^i y^j = C \cdot \sum \left(\frac{x}{\rho}\right)^i \left(\frac{y}{\rho}\right)^j \\ &= C \cdot \frac{1}{1-x/\rho} \cdot \frac{1}{1-y/\rho}. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$y' = F(x, y)$$

ist separierbar; die Lösung  $\sigma$  des Anfangswertproblems mit  $y(0) = 0$  lässt sich elementar bestimmen:

$$\sigma(x) = \rho \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - 2C \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)} \right).$$

Dies ist eine analytische Funktion; also ist das Argument in (ii) anwendbar.  $\square$

**(6.12) Bemerkungen.** (a) Entsprechendes gilt für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit analytischer rechter Seite: Man hat dann mit Potenzreihen in  $n + 1$  Variablen zu tun. Die Grundidee bei den Beweisen bleibt dieselbe; der Notationsaufwand nimmt zu.

(b) Vor der Erfindung neuer Methoden (BANACHscher Fixpunktsatz etc.) lieferten Beweise dieses Typs die einzigen sicheren allgemeinen Ergebnisse zu Existenz- und Eindeutigkeitsfragen. Für Differentialgleichungen mit nicht analytischer rechter Seite war die Sache also vor dem 20. Jahrhundert recht nebulös.

(c) Wichtig ist ein Ergebnis wie (6.11) auch wegen der damit möglichen Strukturaussagen. Zum Beispiel hat man ohne weitere Arbeit die beliebig oftmalige Differenzierbarkeit der Lösung gezeigt und für analytische Funktionen gelten starke Aussagen, etwa der Identitätssatz.

**(6.13) Beispiel.** Auf EULER geht die Diskussion des folgenden Anfangswertproblems zurück:

$$x^2 y' = y - x, \quad y(0) = 0.$$

Der Ansatz  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^k$  liefert

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)v_{k-1}x^k = (v_1 - 1)x + \sum_{k=2}^{\infty} v_k x^k;$$

also  $v_1 = 1$  und die Rekursion  $v_k = (k-1)v_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ . Damit  $v_k = (k-1)!$  für alle  $k \geq 1$  und die Reihe hat Konvergenzradius Null.

Dies steht nicht im Widerspruch zu (6.11), denn in Standard-Schreibweise hat man

$$y' = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0;$$

und die rechte Seite ist alles andere als analytisch in 0. (EULER hat übrigens auch mit divergenten Reihen unbefangen hantiert; manchmal zu Recht.)

**Anmerkungen zu Kapitel I**

Weitere Klassen elementar lösbarer (d.h. auf Integrationsprobleme zurückführbarer) Gleichungen finden sich in WALTER, Kap. I, § 1. Dort werden für separierbare Gleichungen auch Eindeutigkeitsfragen diskutiert. Ein Beweis des Existenzsatzes (4.17) von PEANO findet sich (für eine allgemeinere Klasse von Gleichungen) bei AMANN (Theorem 7.3). Ein ausführlicher Beweis von Satz (6.7) für Systeme wird in CARTAN gegeben.

## II. Lineare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir lineare Differentialgleichungssysteme sowie lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. Solche Gleichungen sind für sich selbst und für Anwendungen von Interesse; darüber hinaus sind sie auch wesentliche Grundlage für das Verständnis komplizierterer Gleichungen. Wie sich zeigen wird, sind Begriffe und Resultate aus der Linearen Algebra für diese Klasse von Gleichungen sehr nützlich.

### §1. Lineare Systeme: Strukturaussagen

**(1.1) Definition.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  eine stetige Abbildung. Dann heißt

$$y' = A(x) \cdot y$$

ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem* (erster Ordnung). Ist darüber hinaus die Abbildung  $b = (b_1, \dots, b_n)^t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so nennt man

$$y' = A(x) \cdot y + b(x)$$

ein *inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem* und  $y' = A(x) \cdot y$  das zugeordnete *homogene lineare Differentialgleichungssystem*.

Man beachte, dass  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  genau dann stetig ist, wenn alle Komponentenfunktionen  $a_{jk} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ , stetig sind.

**(1.2) Bemerkung.** Im Hinblick auf spätere Anwendungen ist es sinnvoll, auch komplexe Differentialgleichungssysteme zu betrachten, die die Form

$$y' = A(x) \cdot y + b(x)$$

haben, wobei  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  stetige Abbildungen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind. Eine Lösung ist dann eine stetig differenzierbare Abbildung  $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit

$$\phi'(x) = A(x) \cdot \phi(x) + b(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Man beachte aber, dass die unabhängige Variable  $x$  hier stets reell ist.

Grundsätzlich lässt sich dies auf den reellen Fall (mit doppelter Dimension) zurückführen: Ist

$$A = A_1 + i \cdot A_2, \quad b = b_1 + i \cdot b_2$$

je die Zerlegung in Real- und Imaginärteil, so ist  $\varphi = u + iv$  Lösung der komplexen Gleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned}u' &= A_1 \cdot u - A_2 \cdot v + b_1 \\v' &= A_2 \cdot u + A_1 \cdot v + b_2.\end{aligned}$$

Der "komplexe Standpunkt" besitzt jedoch einige Vorteile, wie sich zeigen wird.

Zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gilt Folgendes; dabei setzen wir  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**(1.3) Satz.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  sowie  $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetige Abbildungen. Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{K}^n$  genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x) \cdot y + b(x), \quad y(x_0) = c,$$

welche auf ganz  $I$  existiert. Jede weitere Lösung des Anfangswertproblems ist Restriktion von dieser.

**Beweis.** Nach (1.2) können wir  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  annehmen. Sei nun

$$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto A(x) \cdot y + b(x).$$

Dann ist  $f$  stetig, und weiterhin gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n,$$

wobei  $a_{ij}$  den entsprechenden Eintrag von  $A$  bezeichnet. Ist  $J \subset I$  ein kompaktes Intervall, so sind alle  $a_{ij}$  als stetige Funktionen beschränkt auf  $J$ . Weil  $J \times \mathbb{R}^n$  auch konvex ist, zeigen Bemerkung (4.5) und Satz (4.11) aus Kapitel I, dass jedes Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf ganz  $J$  besitzt.

Die Behauptung für  $I$  ergibt sich nun mit einer Folge  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$  kompakter Intervalle, wobei  $J_k \subset J_{k+1}$  für alle  $k$  und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = I$ . Die letzte Aussage ergibt sich aus Kapitel I, Korollar (4.10).  $\square$

Nun untersuchen wir die Struktur der Lösungsgesamtheit.

**(1.4) Satz.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  eine stetige Abbildung.

a) Dann ist die Menge  $V$  aller Lösungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x) \cdot y$$

ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

b) Sei  $x_0 \in I$  gegeben. Dann ist die Abbildung von  $\mathbb{K}^n$  nach  $V$ , welche  $c \in \mathbb{K}^n$  die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = A(x) \cdot y$ ,  $y(x_0) = c$  zuordnet, ein Isomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Insbesondere gilt also  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ .

**Beweis.** a) Trivialerweise ist  $\phi \equiv 0$  eine Lösung. Für  $\phi_1, \phi_2 \in V$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt

$$(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)' = \alpha\phi_1' + \beta\phi_2' = \alpha A(x)\phi_1 + \beta A(x)\phi_2 = A(x)(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2),$$

also  $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in V$ . Demnach ist  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

b) Die Abbildung werde mit  $S$  abgekürzt. Sie ist nach (1.3) wohldefiniert. Wie in Teil a) folgt die Linearität von  $S$ . Weil offenbar  $\phi \equiv 0$  die einzige Lösung zum Anfangswert  $c = 0$  bei  $x_0$  ist, ist  $\text{Kern } S = \{0\}$ , also  $S$  injektiv. Ist weiter  $\phi \in V$ , so ist  $\phi$  nach (1.3) die Lösung zum Anfangswert  $\tilde{c} := \phi(x_0)$  bei  $x_0$ . Wegen (1.3) ist  $S$  auch surjektiv.  $\square$

**(1.5) Beispiel.** Wir betrachten auf  $I = (0, \infty)$  das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \frac{2}{x^2} \cdot y_1, \end{aligned} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen zeigt, dass

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 1/x \\ -1/x^2 \end{pmatrix}$$

Lösungen sind mit linear unabhängigen  $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\psi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Also ist  $\varphi(x), \psi(x)$  eine Lösungsbasis, d. h. Basis des Lösungsraums.

**(1.6) Definition.** Mit den Voraussetzungen von Satz (1.4) sei  $\phi_1, \dots, \phi_n$  ein linear unabhängiges System von Lösungen. Dann heißt die Matrix  $\Phi := (\phi_1, \dots, \phi_n)$  mit den Spalten  $\phi_i$  eine *Fundamentalmatrix* der homogenen linearen Differentialgleichung.

Dass wir eine Fundamentalmatrix eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems und den lokalen Fluss eines (beliebigen) autonomen Systems mit demselben Buchstaben bezeichnen, sollte (hoffentlich) nicht verwirren.

**(1.7) Lemma.** Mit den Voraussetzungen von (1.4) gilt:  $\Phi(x)$  ist für alle  $x \in I$  invertierbar und erfüllt die Matrix-Differentialgleichung

$$\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x).$$

Jede Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems hat die Gestalt  $\Phi(x) \cdot c$ , mit  $c \in \mathbb{K}^n$ .

**Beweis.** Wäre  $\Phi(x_0)$  für ein  $x_0 \in I$  nicht invertierbar, so gäbe es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , nicht alle Null, so dass  $\lambda_1\phi_1(x_0) + \dots + \lambda_n\phi_n(x_0) = 0$ . Mit Satz (1.4) b) folgt  $\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n = 0$  und die Funktionen  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sind linear abhängig; Widerspruch. Für die weiteren Aussagen beachte, dass die Spalte Nr.  $j$  von  $A(x) \cdot \Phi(x)$  gerade durch  $A(x) \cdot \phi_j(x)$  gegeben ist.  $\square$

Wie bei linearen Gleichungssystemen behandeln wir nun den inhomogenen Fall.

**(1.8) Satz.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall,  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetige Abbildungen.

a) Dann bildet die Menge  $L$  der Lösungen auf  $I$  des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x) \cdot y + b(x)$$

einen  $n$ -dimensionalen affinen Unterraum des Vektorraums aller stetigen Abbildungen von  $I$  nach  $\mathbb{K}^n$ . Es gilt

$$L = \psi_0 + V,$$

wobei  $\psi_0 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine spezielle Lösung ("partikuläre Lösung") ist und  $V$  den Raum der Lösungen auf  $I$  des zugeordneten homogenen linearen Differentialgleichungssystems  $y' = A(x) \cdot y$  bezeichnet.

b) "Variation der Konstanten": Ist  $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  eine Fundamentalmatrix des homogenen Differentialgleichungssystems, so erhält man alle Lösungen  $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  des inhomogenen Differentialgleichungssystems durch

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot u(x), \quad u(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt + c, \quad x_0 \in I, x \in I, c \in \mathbb{K}^n.$$

Das heißt,  $u$  durchläuft die Lösungen  $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  des Differentialgleichungssystems

$$u'(x) = \Phi(x)^{-1} b(x).$$

**Beweis.** Sind  $\psi_0, \psi \in L$ , so gilt

$$(\psi - \psi_0)' = \psi' - \psi_0' = A(x)\psi + b(x) - (A(x)\psi_0 + b(x)) = A(x)(\psi - \psi_0),$$

also  $\psi - \psi_0 \in V$  und  $\psi \in \psi_0 + V$ . Für  $\varphi \in V$  gilt

$$(\psi_0 + \varphi)' = \psi_0' + \varphi' = A(x)\psi_0 + b(x) + A(x)\varphi = A(x)(\psi_0 + \varphi) + b(x),$$

also  $\psi_0 + \varphi \in L$ . Demnach gilt  $L = \psi_0 + V$ . Die Existenz von  $\psi_0$  folgt aus (1.3), der verbleibende erste Teil aus (1.4).

Aus dem Ansatz  $\psi = \Phi \cdot u$  ergibt sich  $\psi' = \Phi' \cdot u + \Phi \cdot u' = A \cdot \psi + \Phi \cdot u'$  wegen  $\Phi' = A \cdot \Phi$ . Demnach ist  $\psi \in L$ , d. h.  $\psi' = A \cdot \psi + b$ , äquivalent zu  $\Phi \cdot u' = b$ , d. h.  $u' = \Phi^{-1} \cdot b$  und

$$u(x) = c + \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt.$$

Das ist die Behauptung. □

Wir diskutieren ein

**(1.9) Beispiel.** Für  $I = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sei gegeben das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2, \\ y_2' &= y_1 + \sin(2x), \end{aligned} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Das homogene Differentialgleichungssystem  $y_1' = -y_2$ ,  $y_2' = y_1$  hat

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

als Lösungen. Wegen

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist  $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$  eine Lösungsbasis. Nun gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \end{pmatrix} dx = \int \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin x \cos x \end{pmatrix} dx \\ &= \int \begin{pmatrix} 2 \sin^2 x \cos x \\ 2 \sin x \cos^2 x \end{pmatrix} dx = \frac{2}{3} \left[ \begin{pmatrix} \sin^3 x \\ -\cos^3 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Folglich erhält man die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \frac{2}{3} \left[ \begin{pmatrix} \sin^3 x \\ -\cos^3 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos x \sin x + c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ \sin^2 x - \cos^2 x + c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin 2x + c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ -\cos 2x + c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**(1.10) Bemerkung.** In einer Reihe von Fällen ist es möglich, auf einfachere Weise an eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems zu kommen. (Beachte, dass nach (1.8) a) die Kenntnis einer einzigen Lösung des inhomogenen Systems genügt, wenn man das homogene System schon gelöst hat!)

**(1.11) Beispiel.**

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Das zugeordnete homogene System hat nach (1.9) die Lösungsbasis

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Macht man für eine spezielle Lösung den Ansatz

$$\psi_0(x) = e^x \cdot v = e^x \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

mit zu bestimmendem  $v$ , so ergibt Einsetzen

$$e^x \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} + e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 1 \\ -v_1 + v_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit Lösung} \quad v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$



Damit  $\psi_0(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  und die Lösungsgesamtheit ist gegeben durch

$$e^x \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

mit reellen Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ .

Nun wenden wir uns dem Problem zu, wie man Lösungen homogener linearer Systeme bestimmt. Vorab sei zur Warnung angemerkt, dass man generell (also für beliebiges  $A(x)$ ) kein Verfahren hat, eine Lösungsbasis explizit zu bestimmen. Gerade deshalb sind Struktursätze wie (1.3), (1.4) und (1.8) interessant! Für den Fall, dass  $A(x) = A$  konstant ist, lässt sich jedoch wieder Lineare Algebra einsetzen:

**(1.12) Satz.** Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  konstant.

a) Ist  $a \in \mathbb{K}^n$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ , so ist

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto e^{\lambda x} a,$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ .

b) Wenn  $a_1, \dots, a_n$  eine Basis des  $\mathbb{K}^n$  ist, die aus Eigenvektoren von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  besteht, so bilden die Funktionen

$$\phi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto e^{\lambda_k x} a_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

eine Lösungsbasis des Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ .

c) Ist  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ , so ergibt sich aus b) eine reelle Lösungsbasis (mit  $\mathbb{R}^n$ -wertigen Funktionen) wie folgt:

Hat  $A$  die reellen Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  mit Eigenvektoren  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$  und die nicht-reellen Eigenwerte  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}$ ,  $\bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_{p+q}$ , mit Eigenvektoren  $a_{p+1}, \dots, a_{p+q}$ ,  $\bar{a}_{p+1}, \dots, \bar{a}_{p+q}$ ,  $n = p + 2q$ , so dass die  $n$  Eigenvektoren linear unabhängig sind, dann bilden die Funktionen

$$x \mapsto e^{\lambda_j x} a_j, \quad 1 \leq j \leq p, \quad x \mapsto \text{Re}(e^{\lambda_j x} a_j), \quad x \mapsto \text{Im}(e^{\lambda_j x} a_j), \quad p < j \leq p + q,$$

eine reelle Lösungsbasis des Differentialgleichungssystems.

**Beweis.** a) Es gilt  $\phi'(x) = \lambda e^{\lambda x} a = e^{\lambda x} Aa = A\phi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sind nach a) Lösungen und  $\phi_1(0) = a_1, \dots, \phi_n(0) = a_n$  sind linear unabhängig.

c) Vorab sei (zur Erinnerung) angemerkt, dass für reelles  $A$  aus  $A \cdot v = \mu \cdot v$  ( $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$ ) auch  $A \cdot \bar{v} = \bar{\mu} \cdot \bar{v}$  folgt; also sind die Voraussetzungen stets erfüllbar, wenn  $A$  komplex diagonalisierbar ist.

Nach (1.4) reicht es zu zeigen, dass die Werte der angegebenen Funktionen bei  $x = 0$  über  $\mathbb{C}$  linear unabhängig sind, also

$$a_1, \dots, a_p, \frac{1}{2}(a_{p+1} + \bar{a}_{p+1}), \dots, \frac{1}{2}(a_{p+q} + \bar{a}_{p+q}), \\ \frac{1}{2i}(a_{p+1} - \bar{a}_{p+1}), \dots, \frac{1}{2i}(a_{p+q} - \bar{a}_{p+q}).$$

Dies folgt aber sofort aus der linearen Unabhängigkeit von

$$a_1, \dots, a_p, \quad a_{p+1}, \dots, a_{p+q}, \quad \bar{a}_{p+1}, \dots, \bar{a}_{p+q} \quad \text{über } \mathbb{C}. \quad \square$$

**(1.13) Beispiele.** a)  $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y.$

Routine-Rechnungen ergeben die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also bilden

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto e^{3x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem.

Die Lösung  $\gamma$  zum Anfangswert  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  bei  $x = 0$  erhält man aus dem Ansatz

$$\gamma = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2,$$

und Einsetzen:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem für  $c_1$  und  $c_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{mit Lösung} \quad c_1 = \frac{9}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

b)  $y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$  (vgl. Beispiel (1.9)).

Hier hat man die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

und die Lösung

$$\rho(x) = e^{ix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \lambda_1 \quad \text{und} \quad v_1.$$

Gemäß (1.12) c) erhält man ein reelles Fundamentalsystem aus Real- und Imaginärteil von  $\rho$ . Aus

$$\begin{aligned} \rho(x) &= (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i \cdot \sin x \\ \sin x - i \cdot \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$\phi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad \phi_2(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}.$$

Für die (große) Klasse der reell oder komplex diagonalisierbaren Matrizen führt (1.12) die Lösung der zugeordneten linearen Differentialgleichungssysteme auf Lineare Algebra und Algebra zurück. (Es geht nicht ohne Algebra, weil Nullstellen von Polynomen eine Rolle spielen.) Bekanntlich gibt es jedoch Matrizen, die (auch über  $\mathbb{C}$ ) nicht diagonalisierbar sind. Für eine vollständige Behandlung von Systemen mit konstanten Koeffizienten ist deshalb mehr Aufwand nötig.

Schließlich halten wir noch eine Eigenschaft von Fundamentalmatrizen fest.

**(1.14) Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall,  $A : I \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  stetig und  $\Phi$  eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems  $y' = A(x)y$ . Dann erfüllt die WRONSKI-Determinante

$$\omega(x) := \det(\Phi(x))$$

die lineare Differentialgleichung

$$\omega'(x) = (\text{Spur } A(x)) \cdot \omega(x).$$

**Beweis.** (i) Die Determinantenabbildung  $\vartheta : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \mapsto \det X$ , ist als Polynomabbildung stetig differenzierbar. Wir zeigen zunächst für die (Richtungs-)Ableitung:

$$(*) \quad D\vartheta(X)B = \vartheta(X) \cdot \text{Spur}(BX^{-1}),$$

falls  $X$  invertierbar und  $B$  beliebig.

Ist  $X$  gleich der Einheitsmatrix  $E$ , so ist dies fast direkt zu sehen: Entwickle  $\det(E + s \cdot B)$  mit der LAPLACE-Formel, also

$$\det(E + s \cdot B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) c_{1,\sigma(1)} \cdots c_{n,\sigma(n)};$$

dabei seien die  $c_{ij}$  die Einträge von  $E + s \cdot B$ , und summiert wird über alle Permutationen von  $n$  Elementen. Betrachte dies als Polynom in  $s$ . Ist  $\sigma \neq id$ , so stehen im zugehörigen Produkt mindestens zwei Nicht-Diagonal-Elemente; also ist das Produkt ein polynomiales Vielfaches von  $s^2$ . Für  $\sigma = id$  hat man

$$c_{11} \cdots c_{nn} = 1 + s \cdot \text{Spur } B + s^2 \cdot (\dots).$$

Damit

$$\frac{1}{s} (\vartheta(E + sB) - \vartheta(E)) = \text{Spur } B + s \cdot (\dots)$$

und für  $s \rightarrow 0$  folgt  $D\vartheta(E)B = \text{Spur } B$ .

Für invertierbares  $X$  folgt nun die Behauptung wegen

$$\vartheta(X + sB) = \vartheta(X) \cdot \vartheta(E + sBX^{-1}).$$

(ii) Damit ist

$$\begin{aligned}\omega'(x) &= \frac{d}{dx} \vartheta(\Phi(x)) = D\vartheta(\Phi(x))\Phi'(x) && \text{(Kettenregel)} \\ &\stackrel{(i)}{=} \vartheta(\Phi(x)) \operatorname{Spur}(\Phi'(x)\Phi(x)^{-1}) \\ &= \vartheta(\Phi(x)) \cdot \operatorname{Spur} A,\end{aligned}$$

da  $\Phi' = A \cdot \Phi$ . □

**(1.15) Beispiel.** Für das System

$$y' = \begin{pmatrix} x^3 & e^x \\ x^2 & -x^3 \end{pmatrix} \cdot y$$

ist es (vorsichtig gesagt) nicht einfach, eine Fundamentalmatrix anzugeben. Man weiß mit (1.14) aber sofort, dass die Determinante jeder Fundamentalmatrix konstant ist.

## §2. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Es sei weiter  $A \in \operatorname{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  eine konstante Matrix.

Eine Basis aus Eigenvektoren existiert bekanntlich genau dann, wenn  $A$  diagonalisierbar ist, wenn es also ein  $T \in \operatorname{GL}(n; \mathbb{K})$  gibt mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Das ist z. B. für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  der Fall, wenn  $A$  symmetrisch ist. Im allgemeinen Fall gibt es nach dem Satz von der JORDANSchen Normalform zu  $A \in \operatorname{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  ein  $T \in \operatorname{GL}(n; \mathbb{C})$  mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_r \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(n_r \times n_r; \mathbb{C}).$$

Dann ist  $(t - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{n_k}$  das charakteristische Polynom von  $A$ .

Wir betrachten nun das Verhalten bei Konjugation.

**(2.1) Lemma.** Sei  $A \in \operatorname{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  und  $T \in \operatorname{GL}(n; \mathbb{C})$ . Eine Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  erfüllt genau dann das Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$ , wenn

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad x \mapsto T^{-1}\phi(x),$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems  $z' = (T^{-1}AT)z$  ist.

**Beweis.**  $y' = Ay$  ist äquivalent zu

$$(T^{-1}y)' = T^{-1}y' = T^{-1}Ay = T^{-1}AT(T^{-1}y). \quad \square$$

Mit dem Lemma und der bekannten Transformierbarkeit auf JORDAN-Normalform können wir nun allgemeine Systeme mit konstanten Koeffizienten behandeln. Dazu benutzen wir die Matrix-Exponentialfunktion, die auch in anderen Zusammenhängen von Interesse ist. Definiert wird diese Funktion über die bekannte Reihe.

Wir betrachten  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$  als normierten reellen Vektorraum mit der euklidischen Norm

$$\|A\| := \|A\|_2 = \sqrt{\text{Spur}(\bar{A}^t A)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}, \quad A = (a_{jk}).$$

**(2.2) Lemma.** Für alle  $A, B \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

**Beweis.** Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung gilt wegen

$$AB = (c_{jk}), \quad c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk}, \quad A = (a_{jk}), \quad B = (b_{jk})$$

auch

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |c_{jk}|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk} \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[ \left( \sum_{l=1}^n |a_{jl}|^2 \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^n |b_{mk}|^2 \right) \right] \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |a_{jl}|^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n |b_{mk}|^2 \right) \\ &= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

**(2.3) Satz.** Die Exponentialreihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k := \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right)$$

konvergiert für alle  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ .

**Beweis.** Nach der Dreiecksungleichung und (2.2) gilt für alle  $M \geq m \geq 0$  und  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^M \frac{1}{k!} A^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^M \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=m+1}^M \frac{1}{k!} \|A\|^k. \end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der reellen Exponentialreihe

$$\exp(\|A\|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

folgt, dass die Partialsummenfolge  $(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k)_{m \geq 1}$  eine CAUCHY-Folge in  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  ist: Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $m$  derart, dass  $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k < \varepsilon$ . Weil  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  als endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum vollständig ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Damit haben wir die *Matrix-Exponentialfunktion*

$$\exp : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$$

definiert. Weil  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  ein abgeschlossener Unterraum ist, folgt

$$\exp(A) \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \quad \text{für } A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}).$$

Betrachten wir einige Eigenschaften dieser Exponentialfunktion.

**(2.4) Lemma.** Für alle  $A, B \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  gilt:

- a)  $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ , falls  $AB = BA$ .
- b)  $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1} \cdot \exp(A) \cdot B$ , falls  $B$  invertierbar.
- c)  $\exp(A)$  ist invertierbar mit

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

**Beweis.** a) Weil  $AB = BA$ , gilt die binomische Formel

$$(A + B)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^l B^{k-l}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit leitet man die Identität  $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$  für Matrizen genau so her wie für reelle oder komplexe Zahlen.

b) Für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt  $B^{-1}A^k B = (B^{-1}AB)^k$ . Also gilt für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (B^{-1}AB)^k = B^{-1} \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right) B,$$

denn die Abbildung  $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}), X \mapsto B^{-1}XB$  ist linear, also auch stetig. Der Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  liefert

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1} \cdot \exp(A) \cdot B.$$

c) Weil  $A$  und  $(-A)$  multiplikativ vertauschbar sind, folgt mit a)

$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(-A) \cdot \exp(A) = \exp(A - A) = \exp(0) = E;$$

dabei ist die letzte Gleichheit aus der Reihe offensichtlich.  $\square$

Es ist hier eine Warnung angebracht: Die Identität  $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$  gilt *nicht* allgemein; die multiplikative Vertauschbarkeit von  $A$  und  $B$  wurde nicht ohne Grund vorausgesetzt.

Der folgende Satz klärt, warum die Matrix-Exponentialfunktion für Differentialgleichungen relevant ist:

**(2.5) Satz.** a) Für  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$  gilt

$$\frac{d}{dx} \exp(xA) = A \cdot \exp(xA) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also ist  $\Phi(x) = \exp(xA)$  eine Fundamentalmatrix des homogenen linearen Differentialgleichungssystems  $y' = A \cdot y$  im Sinne von Definition (1.6). Diese Fundamentalmatrix ist durch die Anfangsbedingung  $\Phi(0) = E$  eindeutig bestimmt.

b) Die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = A \cdot y, y(0) = c$  ist gegeben durch  $\varphi(x) = \exp(xA) \cdot c$ .

c) Weiter gilt  $\det(\exp(xA)) = e^{x \cdot \text{Spur } A}$ .

**Beweis.** a) Nach (2.2) und (2.4) gilt für  $x, x_0 \in \mathbb{R}, x \neq x_0$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{x - x_0} [\exp(xA) - \exp(x_0A)] - A \cdot \exp(x_0A) \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{x - x_0} [\exp((x - x_0)A) - E] - A \right\| \cdot \|\exp(x_0A)\| \\ & = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (x - x_0)^{k-1} A^k \right\| \cdot \|\exp(x_0A)\| \\ & \leq |x - x_0| \cdot \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} |x - x_0|^{k-2} \|A\|^k \right) \cdot \|\exp(x_0A)\|. \end{aligned}$$

(Beachte: Für  $|x - x_0| \leq 1$  ist  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$  konvergente Majorante für die Reihe.) Für  $x \rightarrow x_0$  konvergiert dieser Ausdruck gegen 0; also gilt

$$\frac{d}{dx} \exp(xA) \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} [\exp(xA) - \exp(x_0A)] = A \cdot \exp(x_0A).$$

Die Behauptungen in b) und c) folgen aus Lemma (1.7) und Satz (1.14).  $\square$

Damit haben wir einen systematischen Zugang zur Bestimmung eines Fundamentalsystems für das homogene System  $y' = A \cdot y$  mit konstanter Matrix  $A$ : Berechne  $\exp(xA)$ . Aus Lemma (2.4) b) - oder Lemma (2.1) - sieht man außerdem, dass es prinzipiell reicht, diese Berechnung für  $A$  in JORDAN-Normalform durchzuführen. Dafür ist hilfreich:

**(2.6) Lemma.** a) Gilt  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$  mit quadratischen Blöcken  $A_1, \dots, A_r$ , so folgt

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(A_r) \end{pmatrix}.$$

b) Ist speziell  $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$  eine Diagonalmatrix, so gilt

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt  $\exp(\lambda E) = e^{\lambda E}$ .

c) Für

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$$

gilt

$$\exp(x \cdot J) = e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** a) und b) Man hat für alle  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^k \end{pmatrix},$$

also

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(A_r) \end{pmatrix}.$$



c) Nach Lemma (2.4) und b) gilt

$$\exp(xJ) = \exp(\lambda xE + N) = e^{\lambda x} \cdot \exp(N), \quad N = \begin{pmatrix} 0 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$N^0 = E, \quad N^1 = \begin{pmatrix} 0 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & x^2 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x^{n-1} \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^k = 0, \quad k \geq n,$$

gilt

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k,$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

In Teil b) dieses Lemmas findet man (zusammen mit Lemma (2.1)) für diagonalisierbare Matrizen das Verfahren von Satz (1.12) wieder. Für eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  in JORDAN-Normalform beschreiben Teil a) und Teil c) des Lemmas die Gestalt der Fundamentalmatrix  $\exp(xA)$ . In den Spalten dieser Matrix steht ein Fundamentalsystem; jedes seiner Elemente hat die Gestalt

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} \cdot p(x),$$

wobei  $p(x)$  ein  $\mathbb{K}^n$ -wertiges Polynom in  $x$  ist. Für ein JORDAN-Kästchen der Größe  $k \times k$  treten genau Polynome der Grade  $0, 1, \dots, k-1$  auf. (Das Polynom vom Grad 0 ist konstant und ein Eigenvektor von  $A$ .)

Damit können wir eine generelle Strukturaussage treffen.

**(2.7) Satz.** Es sei  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ .

a) Für jedes JORDAN-Kästchen der Größe  $k \times k$  zum Eigenwert  $\lambda_i$  von  $A$  existiert ein linear unabhängiges System  $\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,k}$  von Lösungen der Gestalt

$$\varphi_{i,j}(x) = p_{i,j}(x) \cdot e^{\lambda_i x}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

wobei  $p_{i,j}(x) \in \mathbb{C}^k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , in jeder Komponente ein Polynom vom Grad  $\leq j-1$  ist. Speziell ist  $p_{i,1}$  ein Eigenvektor zu  $\lambda_i$ .

b) Ein System von  $n$  Lösungen, das so aus der Gesamtheit der JORDAN-Kästchen gewonnen wird, ist eine Lösungsbasis.

c) Ist  $A$  reell, so erhält man eine reelle Lösungsbasis wie folgt: Ist  $\lambda$  nicht-reell, so wähle zu jedem JORDAN-Kästchen für  $\lambda$  wie in a) Real- und Imaginärteil  $\operatorname{Re} \varphi_1, \operatorname{Im} \varphi_1, \dots, \operatorname{Re} \varphi_k, \operatorname{Im} \varphi_k$ , und lasse die Lösungen zum entsprechenden JORDAN-Kästchen von  $\bar{\lambda}$  weg.

**Beweis.** Ist  $A$  in JORDAN-Normalform, so folgen a) und b) direkt aus Lemma (2.6), wenn man die Spalten von  $\exp(xA)$  betrachtet. Andernfalls sei  $T \in GL(n, \mathbb{K})$  so, dass  $T^{-1}AT$  in JORDAN-Normalform ist; dann benutze Lemma (2.4) b) oder Lemma (2.1). Bei der Rücktransformation ändern sich die Grade der beteiligten Polynome nicht. Teil c) wird analog zu Satz (1.12) c) bewiesen; wir verzichten hier auf Details.  $\square$

**(2.8) Bemerkungen.** a) Grundsätzlich liefert Satz (2.7) einen systematischen Zugang zur Bestimmung eines Fundamentalsystems. Unter Umständen ist es jedoch auch sinnvoll, nur die Information über die Gestalt der Lösungen zu benutzen und direkt zu rechnen.

b) Hat  $A \in \operatorname{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  "nur" obere Dreiecksgestalt, so lässt sich das zugehörige homogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= a_{n-1,n-1}y_{n-1} + a_{n-1,n}y_n \\ y_n' &= a_{nn}y_n \end{aligned}$$

unter Zuhilfenahme von Kapitel I, Korollar (3.4) und Satz (3.6) "von unten nach oben" sukzessive lösen: Löse die letzte Gleichung, setze das Resultat in die vorletzte ein und löse; usw. In jedem Schritt ist nur eine eindimensionale lineare Differentialgleichung zu lösen.

**(2.9) Beispiel.** Man betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2, \\ y_2' &= -y_1 + y_2, \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  hat das charakteristische Polynom  $(t-3)(t-1) + 1 = (t-2)^2$  und somit 2 als doppelten Eigenwert mit Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Dann erhält man eine Lösungsbasis in der Form

$$e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e^{2x} \begin{pmatrix} \alpha + \beta x \\ \gamma + \delta x \end{pmatrix}$$

aufgrund von (2.7), wobei wir gleich  $\alpha = 0$  annehmen dürfen. Wir bestimmen  $\beta, \gamma, \delta$  durch Einsetzen in das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} (\beta + 2\beta x)e^{2x} &= (\gamma + (3\beta + \delta)x)e^{2x}, \\ (\delta + 2\gamma + 2\delta x)e^{2x} &= (\gamma + (\delta - \beta)x)e^{2x}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\beta = \gamma, \quad 2\beta = 3\beta + \delta, \quad \delta + 2\gamma = \gamma, \quad 2\delta = \delta - \beta,$$

das die Lösung  $\beta = \gamma = -\delta$  besitzt. Also ist

$$e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

eine Lösungsbasis.

Man sollte nicht meinen, dass die Bestimmung einer Fundamentalmatrix für gegebenes  $A$  grundsätzlich gelingt. Ein großes Hindernis ist etwa die exakte Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms, die in Realsituationen (anders als üblicherweise in Klausuren) nicht möglich ist. Der Wert der entwickelten Theorie erschöpft sich aber nicht in Anwendungen auf explizite Rechnungen. Wichtig sind auch strukturelle Aussagen über das Verhalten der Lösungen, wie die Folgende.

**(2.10) Satz.** Gegeben sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  und auf  $\mathbb{K}^n$  sei (irgend-) eine Norm  $\|\cdot\|$  vorgegeben.

a) Haben alle Eigenwerte von  $A$  negativen Realteil, so gibt es reelle  $\beta > 0$  und  $M > 0$  derart, dass

$$\|\exp(xA) \cdot c\| \leq M \cdot \|c\| \cdot e^{-\beta x}$$

für alle  $c \in \mathbb{K}^n$  und alle reellen  $x \geq 0$ . Insbesondere gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass aus  $\|c\| < \delta$  folgt:

$$\|\exp(xA) \cdot c\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \geq 0,$$

und weiter gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(xA) \cdot c = 0$ .

b) Gibt es einen Eigenwert  $\lambda^*$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda^* > 0$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $c \in \mathbb{K}^n$ , so dass  $\|c\| < \varepsilon$ , aber die Lösung  $\exp(xA) \cdot c$  ist auf  $[0, \infty)$  unbeschränkt.

**Beweis.** a) Wir dürfen hier  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  annehmen.

Vorbemerkung: Für jedes  $\alpha > 0$  und jedes Polynom  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt bekanntlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} \cdot q(x) = 0$$

und es gibt ein  $K > 0$  derart, dass  $|e^{-\alpha x} \cdot q(x)| \leq K$  für alle  $x \in [0, \infty)$ . Sei  $\beta > 0$  so, dass  $-\beta > \text{Re } \lambda$  für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ .

Sei nun  $\lambda = \mu + iv$  Eigenwert von  $A$ , mit  $\beta + \mu < 0$  nach Voraussetzung. Wir betrachten die zu einem JORDAN-Kästchen für  $\lambda$  gehörigen Lösungen. Für eine Lösung der Gestalt

$$\varphi(x) = p(x) \cdot e^{\lambda x} \quad (p \text{ vektorwertiges Polynom})$$

ist

$$\begin{aligned} \|e^{\beta x} \cdot \varphi(x)\| &= e^{\beta x} \|p(x) e^{\mu x} \cdot e^{ivx}\| = e^{\beta x} e^{\mu x} \cdot \|p(x)\| \quad (\text{da } |e^{ivx}| = 1) \\ &\leq e^{(\beta+\mu)x} \cdot q(x) \quad \text{für alle } x \geq 0, \end{aligned}$$

wobei  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom ist, das sich aus

$$\|p(x)\| = \left\| \sum p_l \cdot x^l \right\| \leq \sum \|p_l\| \cdot x^l = q(x) \quad \text{für } x \geq 0$$

bestimmt.

Mit der Vorbemerkung folgt die erste Behauptung für den Anfangswert  $c = p(0)$ , mit einer geeigneten Konstante. Gemäß Satz (2.7) erhält man aus dem dort angegebenen Fundamentalsystem eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{K}^n$  und Konstanten  $K_1, \dots, K_n$  derart, dass

$$\|e^{\beta x} \cdot \exp(xA) \cdot v_i\| \leq K_i, \quad \text{alle } x \geq 0,$$

und  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\beta x} \cdot \exp(xA) \cdot v_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Für  $c \in \mathbb{K}^n$ ,  $c = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ , gilt  $\|c\| \geq K_0^{-1} \cdot \max\{|c_1|, \dots, |c_n|\}$  für ein geeignetes  $K_0 > 0$ , denn alle Normen auf  $\mathbb{K}^n$  sind äquivalent.

Setzt man nun  $M := n \cdot K_0 \cdot \max\{K_1, \dots, K_n\}$ , so ist für alle  $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \|e^{\beta x} \cdot \exp(xA) \cdot c\| &\leq \sum_{i=1}^n |c_i| \|e^{\beta x} \exp(xA) \cdot v_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |c_i| \cdot \frac{M}{n \cdot K_0} \\ &\leq n \cdot K_0 \cdot \|c\| \cdot \frac{M}{n \cdot K_0} = M \cdot \|c\|, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, etwa mit  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ .

b) Es sei  $v$  ein Eigenvektor zu  $\lambda^* = \mu^* + iv^*$ , mit  $\|v\| = 1$ . Dann ist für  $c = \frac{\varepsilon}{2} \cdot v$ :

$$\begin{aligned} \|\exp(xA) \cdot c\| &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|\exp(xA) \cdot v\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|e^{\lambda^* x} \cdot v\| = \frac{\varepsilon}{2} e^{\mu^* x} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für  $x \rightarrow \infty$ . Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , folgt die Behauptung direkt, ebenso für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und reelles  $\lambda^*$ . Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $\lambda^* \notin \mathbb{R}$  können Real- und Imaginärteil der Lösung nicht beide beschränkt sein.  $\square$

**(2.11) Bemerkung.** Wir werden diesen Satz später bei Stabilitätsfragen benutzen. Man kann auch den Fall genau diskutieren, dass  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt: Besitzt ein Eigenwert  $\mu$  mit  $\operatorname{Re} \mu = 0$  einen nichttrivialen JORDANKasten, so hat  $y' = Ay$  unbeschränkte Lösungen (Polynome oder Polynome  $\cdot e^{i\omega x}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ) für  $x \rightarrow \infty$ . Wenn also  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$ , so sind alle Lösungen auf  $[0, \infty]$  beschränkt nur dann, wenn alle Eigenwerte mit Realteil Null die Bedingung "geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit" erfüllen. Diese Bedingung reicht dann aber für Beschränktheit auch hin, wie die Lösungsformel zeigt.

Inhomogene lineare Differentialgleichungen

$$y' = Ay + b(x)$$

mit konstanter Matrix  $A$  lassen sich grundsätzlich gemäß Satz (1.8) behandeln. Ein wichtiger Spezialfall geht jedoch schneller:

**(2.12) Satz.** Es seien  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  sowie  $b \in \mathbb{K}^n$  konstant. Jede Lösung  $w$  des linearen Gleichungssystems  $Az + b = 0$  ergibt eine (konstante) partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = Ay + b.$$

Die Lösungsgesamtheit ist dann gegeben durch

$$w + \exp(xA) \cdot c, \quad c \in \mathbb{K}^n.$$

**Beweis.** Einsetzen von  $w$  zeigt die erste Aussage, (1.8) den Rest. □

Man beachte, dass dieser Trick jedenfalls immer dann funktioniert, wenn  $A$  invertierbar ist.

**(2.13) Beispiel.** Das System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

besitzt eine konstante partikuläre Lösung: Löse

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \text{also } w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mit Beispiel (1.13) b) ergibt sich die reelle Lösungsgesamtheit zu

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### §3. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Mit dem Reduktionssatz Kap I, (2.6) können wir die Ergebnisse aus §1 und §2 auf lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung übertragen.

**(3.1) Definition.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

eine *homogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

heißt *inhomogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung* und

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

die zugeordnete *homogene Differentialgleichung*.

Zur Struktur der Lösungsgesamtheit gilt:

**(3.2) Satz.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  stetige Funktionen. Dann gilt:

a) Die Menge  $V$  aller Lösungen  $\phi : I \rightarrow \mathbb{K}$  der linearen homogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und jede Lösung der Gleichung  $n$ -ter Ordnung lässt sich auf ganz  $I$  fortsetzen.

b) Es sei

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

das der Gleichung in a) gemäß Kapitel I, Satz (2.6) zugeordnete Differentialgleichungssystem erster Ordnung und  $V^*$  der Vektorraum aller Lösungen dieses Systems. Dann ist die Abbildung

$$P : V \rightarrow V^*, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Insbesondere ist  $\dim V = n$ .

c) Die Menge  $L$  der Lösungen  $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}$  der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

ist ein affiner Unterraum der Dimension  $n$ . Ist  $\psi_0 \in L$  eine spezielle Lösung ("partikuläre Lösung"), so gilt

$$L = \psi_0 + V.$$

**Beweis.** Teil a) und c) verifiziert man wie im Beweis von Satz (1.4) und Satz (1.8). Zu Teil b) beachte, dass  $P$  nach Kapitel I, Satz (2.6), bijektiv ist. Die Linearität von  $P$  ist offensichtlich. Die Dimensionsaussagen folgen nun aus (1.4).  $\square$

**(3.3) Beispiel.** Sei  $I = (0, \infty)$  und

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0.$$

Man verifiziert, dass  $\phi_1(x) = x$  und  $\phi_2(x) = \sqrt{x}$  Lösungen sind. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \phi_1(1) \\ \phi_1'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(1) \\ \phi_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Also sind die Werte der zugeordneten Lösungen des Systems linear unabhängig bei  $x_0 = 1$ . Die Lösungen des Systems sind also linear unabhängig in  $V^*$ , und mit (3.2) sind  $\varphi_1, \varphi_2$  eine Lösungsbasis.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Fall konstanter Koeffizienten.

**(3.4) Definition.** Sind  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ , so nennt man

$$P(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[t]$$

das *charakteristische Polynom* der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

$n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Betrachtet man das der Differentialgleichung gemäß (3.2) zugeordnete Differentialgleichungssystem, so stellt man fest, dass  $A$  die so genannte *Begleitmatrix* des Polynoms  $P(t)$  ist und dass  $P(t)$  daher mit dem charakteristischen Polynom von  $A$  übereinstimmt. Damit kann man (2.7) anwenden und erhält den folgenden Satz.

**(3.5) Satz.** Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Sei  $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[t]$  das charakteristische Polynom der homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0.$$

Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $P(t)$ , so sind

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

Lösungen dieser Differentialgleichung. Aus den Nullstellen von  $P(t)$  erhält man auf diese Weise eine Lösungsbasis. Sind  $a_0, \dots, a_{n-1}$  reell, so ergibt sich auf obige Weise eine reelle Lösungsbasis, indem man zu  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$x^j e^{\alpha x} \cos(\beta x) = \operatorname{Re}(x^j e^{\lambda x}), \quad x^j e^{\alpha x} \sin(\beta x) = \operatorname{Im}(x^j e^{\lambda x}), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

betrachtet und die Lösungen zu  $\bar{\lambda}$  weglässt.

**Beweis.** Nach (3.2) erhält man jede Lösung aus einer Lösung des zugeordneten Systems, indem man davon die erste Komponente nimmt, und aus einer Lösungsbasis des zugeordneten Systems durch Projektion auf die jeweils erste Komponente auch eine Lösungsbasis der Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.

Ist  $\lambda$  eine  $m$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so liefern die nach (2.7) gefundenen Lösungen des Systems also linear unabhängige Lösungen

$$\psi_1(x) = p_1^*(x)e^{\lambda x}, \dots, \psi_m(x) = p_m^*(x)e^{\lambda x},$$

wobei jedes  $p_i^*$  ein Polynom vom Grad  $\leq m-1$  ist, denn ein JORDAN-Kästchen zu  $\lambda$  hat höchstens Größe  $m \times m$ .

Nun sind offenbar  $\psi_1, \dots, \psi_m$  genau dann linear unabhängig, wenn  $p_1^*, \dots, p_m^*$  dies sind. Dann bilden  $p_1^*, \dots, p_m^*$  aber eine Basis des  $m$ -dimensionalen Vektorraums aller Polynome vom Grad  $\leq m-1$ . Weil jede Linearkombination der  $\psi_i$  wieder eine Lösung ist, erhält man somit ein linear unabhängiges System von Lösungen  $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$ .

Die restlichen Aussagen folgen mit (2.7) Teil b) und c). □

**(3.6) Beispiele.** a) Die Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + 8y' + 16y = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$P(t) = t^5 + 4t^4 + 2t^3 - 4t^2 + 8t + 16 = (t+2)^3(t-1+i)(t-1-i).$$

Ein reelles Fundamentalsystem wird nach (3.5) gegeben durch

$$e^{-2x}, \quad xe^{-2x}, \quad x^2e^{-2x}, \quad e^x \cos x, \quad e^x \sin x.$$

b) Die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$$

hat das charakteristische Polynom

$$P(t) = t^4 + 18t^2 + 81 = (t^2 + 9)^2 = (t + 3i)^2(t - 3i)^2.$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist daher

$$\cos 3x, \quad x \cos 3x, \quad \sin 3x, \quad x \sin 3x.$$

**(3.7) Bemerkung.** Ist eine inhomogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

gegeben, so steht für das zugehörige System prinzipiell Satz (1.8) ("Variation der Konstanten") bereit. Wir wollen dies für Gleichungen 2. Ordnung ausführen. Gegeben ist also

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

auf einem offenen Intervall  $I$  mit stetigen Funktionen  $a_1, a_0, b$ . Ist  $\varphi_1, \varphi_2$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}$$

nach (3.2) eine Fundamentalmatrix des zugeordneten Systems

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1, \end{aligned}$$



und nach (1.8) ist mit  $x_0 \in I$  und

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2'(t) & -\varphi_2(t) \\ -\varphi_1'(t) & \varphi_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)} \cdot \begin{pmatrix} -\varphi_2(t) \cdot b(t) \\ \varphi_1(t) \cdot b(t) \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

dann  $\Phi(x) \cdot u(x)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und für spezielle Gestalt der rechten Seite  $b(x)$  gibt es kürzere Wege. Ein Beispiel dafür ist der

**(3.8) Satz.** Es seien  $a_0, \dots, a_{n-1}, \mu \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ . Ist  $\mu$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0,$$

so hat die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = c \cdot e^{\mu x}$$

eine partikuläre Lösung der Gestalt  $\psi(x) = k \cdot e^{\mu x}$  mit  $k = \frac{c}{P(\mu)}$ .

**Beweis.** Einsetzen von  $\psi(x) = k \cdot e^{\mu x}$  in die linke Seite ergibt  $P(\mu) \cdot k \cdot e^{\mu x}$ . Ein Vergleich liefert die Behauptung.  $\square$

**(3.9) Bemerkung.** Allgemeiner gilt in der Situation von (3.8): Ist  $q$  ein Polynom, so existiert eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = q(x)e^{\mu x}$$

von der Gestalt  $\psi(x) = q^*(x) \cdot e^{\mu x}$ . Dabei ist  $q^*$  ein Polynom und es gilt  $\text{Grad } q^* = \text{Grad } q$ , falls  $\mu$  keine Nullstelle von  $P$ , sowie  $\text{Grad } q^* = m + \text{Grad } q$ , falls  $\mu$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $P$  ist. Bewiesen wird dies durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

**(3.10) Beispiel.** Die allgemeine Lösung von

$$y'' + y = a \cdot e^{i\omega x} \quad (\omega > 0 \text{ reell}, a \in \mathbb{C})$$

bestimmt sich so:

Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist durch  $\varphi_1(x) = e^{ix}$ ,  $\varphi_2(x) = e^{-ix}$  gegeben.

Im Fall  $\omega \neq 1$  ergibt Satz (3.8) die partikuläre Lösung

$$\psi(x) = \frac{a}{1 - \omega^2} e^{i\omega x}.$$

Im Fall  $\omega = 1$  setze man an

$$\psi(x) = (b + cx) e^{ix}$$

(vgl. Bemerkung (3.9)). Einsetzen liefert

$$2ic e^{ix} = a e^{ix},$$

also

$$c = -\frac{a}{2}i \quad (\text{und } b \text{ beliebig})$$

Man beachte, dass die partikuläre Lösung ( $b = 0$ )

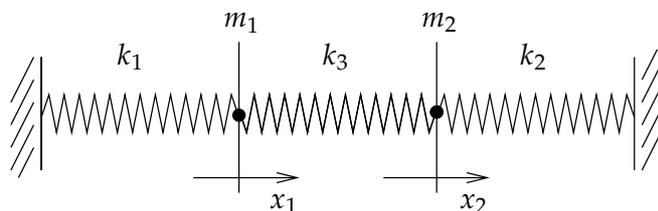
$$\psi(x) = -\frac{a}{2}ix e^{ix}$$

im Fall  $a \neq 0$  unbeschränkt ist ("Resonanzkatastrophe").

## §4. Gekoppelte kleine Schwingungen

Als eine Anwendung der Theorie linearer Differentialgleichungen und insbesondere der Linearen Algebra betrachten wir gekoppelte Schwingungen. Wie in der Mechanik üblich, nennen wir die unabhängige Variable  $t$  (Zeit) und die abhängige Variable  $x = x(t)$ ; diese ist im Allgemeinen vektorwertig. Zeitableitungen werden mit  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  usw. bezeichnet.

### (4.1) Beispiel.



Zwei Massen  $m_1, m_2$  sind in der skizzierten Weise mit festen Wänden sowie untereinander durch Federn verbunden. Die Federn mögen dem HOOKEschen Gesetz genügen. Nach diesem (aus Experimenten gefundenen und näherungsweise für nicht zu große Auslenkungen gültigen) Gesetz ist die (zusätzliche) Kraft, mit der eine Feder einer Längenänderung (oder zusätzlichen Längenänderung)  $\Delta l$  entgegen wirkt, proportional zu  $\Delta l$  und der Längenänderung entgegengesetzt gerichtet. Die Proportionalitätskonstante wird auch *Federkonstante* genannt. Die Federn in der Skizze haben Federkonstanten  $k_1, k_2$ , respektive  $k_3$ . Die Gravitation sei für dieses System ausgeschaltet und die Bewegung der Massen erfolge nur in einer Richtung, entlang der horizontalen Achse. Bei  $x_1 = x_2 = 0$  ist das System in Ruhe. (Man kann annehmen, dass die Federn dann keine Kraft ausüben.)

Wir leiten die Bewegungsgleichungen für dieses System her: Nach dem HOOKE-Gesetz ist die Kraft auf die erste Masse gleich

$$F_1 = -k_1 \cdot x_1 - k_3(x_1 - x_2).$$

Der erste Term entspricht dabei der von der linken Feder ausgeübten Kraft, der zweite kommt von der mittleren Feder. Die Kraft wirkt der Auslenkung der Feder entgegen; dies erklärt die Vorzeichen. Mit NEWTONs zweitem Gesetz folgt

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3(x_1 - x_2)$$

und analog

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3(x_2 - x_1).$$

Umgeschrieben erhält man also für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \ddot{x} = - \begin{pmatrix} (k_1 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & (k_2 + k_3) \end{pmatrix} \cdot x.$$

Das System gekoppelter Schwingungen führt also auf ein Differentialgleichungssystem der Gestalt

$$(1) \quad M \cdot \ddot{x} = -K \cdot x.$$

Im Beispiel sind  $M$  und  $K$  symmetrische, positiv definite Matrizen. Dies ist die Situation, die uns vor allem interessiert.

Zunächst aber Allgemeines zu Systemen von Gleichungen zweiter Ordnung:

**(4.2) Satz.** Mit  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$  sei folgendes homogene lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung gegeben:

$$(2) \quad \ddot{x} = A \cdot x.$$

Dann gilt:

(a) Die Lösungen dieses Systems bilden einen Vektorraum der Dimension  $2n$ .

(b) Ist  $\alpha \in \mathbb{C}$  so, dass  $\alpha^2$  Eigenwert von  $A$  mit Eigenvektor  $v \in \mathbb{K}^n$ , so ist

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \varphi(t) = e^{\alpha t} \cdot v$$

eine Lösung der Gleichung.

(c) Falls  $A$  diagonalisierbar ist und 0 kein Eigenwert von  $A$  ist, so erhält man eine Lösungsbasis der Gestalt

$$\varphi_j = e^{\alpha_j t} \cdot v_j, \quad \psi_j = e^{-\alpha_j t} \cdot v_j, \quad 1 \leq j \leq n;$$

dabei ist je  $\alpha_j^2$  Eigenwert mit Eigenvektor  $v_j$ .

**Beweis.** (a) Die Lösungen bilden offensichtlich einen Vektorraum. Mit dem Argument im Beweis von Satz (3.2) ergibt sich, dass (2) und das  $2n$ -dimensionale System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n),$$

wobei  $E$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix ist, äquivalent sind. Genauer gilt: Die Abbildung

$$T: \mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1$$

bildet Lösungen des  $2n$ -dimensionalen Systems in Lösungen von (2) ab, und dies ist ein Isomorphismus der Lösungsräume.

(b) Einsetzen und Nachrechnen.

(c) Es reicht nach (a) zu zeigen, dass  $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n$  linear unabhängig sind. Falls  $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$  existieren mit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j (c_j e^{\alpha_j t} \cdot v_j + d_j e^{-\alpha_j t} \cdot v_j) \\ &= \sum_j (c_j e^{\alpha_j t} + d_j e^{-\alpha_j t}) \cdot v_j \quad (t \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

so folgt mit Differenzieren

$$0 = \sum_j \alpha_j (c_j e^{\alpha_j t} - d_j e^{-\alpha_j t}) \cdot v_j \quad (t \in \mathbb{R}),$$

und Einsetzen von  $t = 0$  ergibt

$$0 = \sum (c_j + d_j) \cdot v_j = \sum \alpha_j (c_j - d_j) \cdot v_j.$$

Weil  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind, folgt

$$c_j + d_j = c_j - d_j = 0, \quad \text{also} \quad c_j = d_j = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n. \quad \square$$

**Bemerkung** Analog zu (2.7) sind Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung reelle Lösungen, wenn  $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ . So erhält man aus einer komplexen Lösungsbasis eine reelle.

Reelle symmetrische Matrizen sind bekanntlich über  $\mathbb{R}$  diagonalisierbar; insbesondere sind alle Eigenwerte reell. Positiv definite symmetrische Matrizen haben nur positive Eigenwerte. Ist  $K$  also wie in (1), so hat  $(-K)$  nur negative Eigenwerte. Also gilt speziell.

**(4.3) Korollar.** Im Fall  $M = E$  besitzt die Gleichung (1) in der Form

$$\ddot{x} = -K \cdot x$$

mit reellem positiv definitem  $K$  eine Lösungsbasis der Gestalt

$$\varphi_j(t) = e^{i\omega_j t} \cdot v_j, \quad \psi_j(t) = e^{-i\omega_j t} \cdot v_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

wobei  $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$  und  $-\omega_1^2, \dots, -\omega_n^2$  die Eigenwerte von  $(-K)$  mit reellen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  (respektive) sind.

Eine reelle Lösungsbasis ist gegeben durch

$$\mu_j(t) = \cos(\omega_j \cdot t) v_j, \quad \nu_j(t) = \sin(\omega_j \cdot t) v_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

**(4.4) Beispiel.** Betrachtet man Beispiel (4.1) mit gleichen Massen  $m_1 = m_2 = m$ , so erhält man die Gleichung

$$\ddot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_3}{m} & \frac{k_3}{m} \\ \frac{k_3}{m} & -\frac{k_2+k_3}{m} \end{pmatrix} \cdot x,$$

und (4.3) ist anwendbar.

Wir sehen uns den Spezialfall einer symmetrischen Konfiguration an, setzen also weiter noch  $k_1 = k_2$  voraus. Dann sind Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix einfach zu bestimmen: Es ist  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor mit Eigenwert  $\lambda_1 = -\frac{k_1}{m}$ , und  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor mit Eigenwert  $\lambda_2 = -\frac{k_1+2k_3}{m}$ . Die allgemeine (reelle) Lösung ist also von der Form

$$\begin{aligned} & \left( c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}} t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}} t\right) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & + \left( c_3 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k_1+2k_3}{m}} t\right) + c_4 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k_1+2k_3}{m}} t\right) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sind Anfangswerte  $x(0)$  und  $\dot{x}(0)$  vorgegeben, so bestimmen diese eindeutig die Konstanten  $c_1, \dots, c_4$ .

Betrachtet man speziell die Lösungen mit  $c_3 = c_4 = 0$ , so sieht man, dass diese stets  $x_1(t) = x_2(t)$  erfüllen; die Massen bewegen sich synchron (und die mittlere Feder ist immer unbelastet). Die speziellen Lösungen mit  $c_1 = c_2 = 0$  erfüllen stets  $x_1(t) = -x_2(t)$ ; die Massen laufen also stets in entgegengesetzter Richtung. In Physikvorlesungen bekommt man dies auch manchmal vorgeführt.

Für die allgemeine Betrachtung reicht (4.3) nicht aus; man muss wirklich auf (1) mit einer positiv definiten Matrix  $M$  zurückgehen. (Dies wird von der Physik erzwungen: In unserem Beispiel sind die Massen im Allgemeinen verschieden und in anderen Beispielen oder anderen Koordinatensystemen treten auch Matrizen  $M$  auf, die nicht diagonal sind.) Für die Mathematik ist dies kein Problem:

**(4.5) Lemma.** *Es seien  $M$  und  $K$  positiv definite reelle symmetrische  $n \times n$ -Matrizen.*

(a) *Alle Nullstellen des Polynoms  $f(\tau) = \det(\tau \cdot M + K)$  sind reell und negativ.*

(b) *Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  diese Nullstellen, so gibt es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{R}^n$  so, dass  $K \cdot v_j = -\lambda_j \cdot Mv_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .*

**Beweis.** Es gibt ein invertierbares  $C \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ , so dass  $M = C^{\text{tr}} \cdot C$ . (Lineare Algebra).

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \det(\lambda M + K) = 0 & \Leftrightarrow 0 = \det\left((C^{\text{tr}})^{-1}(\lambda M + K)C^{-1}\right) \\ & = \det\left(\lambda \left((C^{\text{tr}})^{-1}MC^{-1}\right) + (C^{\text{tr}})^{-1}KC^{-1}\right) \\ & = \det(\lambda E + K^*), \end{aligned}$$

wobei  $K^* := (C^{\text{tr}})^{-1}KC^{-1}$  wieder symmetrisch und positiv definit ist. Für  $K^*$  folgt die Aussage mit dem Satz über die Hauptachsentransformation.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} K \cdot v = \lambda Mv &\Leftrightarrow ((C^{\text{tr}})^{-1}KC^{-1})(Cv) = \lambda((C^{\text{tr}})^{-1}MC^{-1})(Cv) \\ &\Leftrightarrow K^*(Cv) = \lambda \cdot (Cv). \end{aligned}$$

Wieder folgt die Aussage mit dem Satz über die Hauptachsentransformation.  $\square$

Wir haben davon folgenden Nutzeffekt. Der Beweis läuft wie in (4.3).

**(4.6) Satz.** Eine Lösungsbasis für das System (1) erhält man in der Gestalt

$$\varphi_j(t) = e^{i\omega_j t} \cdot v_j, \quad \psi_j(t) = e^{-i\omega_j t} \cdot v_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

wobei  $-\omega_1^2, \dots, -\omega_n^2$  die Nullstellen von  $f(\tau) = \det(\tau \cdot M + K)$  sind und

$$K \cdot v_j = \omega_j^2 \cdot Mv_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dabei sind  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ .

Man beachte, dass die  $v_j$  durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden können.

**(4.7) Beispiel.** Wir führen Beispiel (4.1) fort, im allgemeinen Fall. Zu bestimmen sind also die Nullstellen  $-\omega_1^2, -\omega_2^2$  von

$$f(\tau) = \det \begin{pmatrix} \tau m_1 + (k_1 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & \tau m_2 + (k_2 + k_3) \end{pmatrix}$$

und  $v_j$  bestimmt sich aus

$$\begin{pmatrix} -\omega_j^2 \cdot m_1 + (k_1 + k_3) & -k_3 \\ -k_3 & -\omega_j^2 \cdot m_2 + (k_2 + k_3) \end{pmatrix} \cdot v_j = 0,$$

für  $j = 1, 2$ . Zahlenbeispiele werden dem Leser überlassen.

## §5. Reihenentwicklungen für lineare Gleichungen zweiter Ordnung

In diesem Abschnitt sollen einige homogene lineare Differentialgleichungen der Gestalt

$$(1) \quad M(x)y'' + A(x)y' + B(x)y = 0; \quad y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = u_1$$

betrachtet werden, wobei  $M, A, B$  auf einem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  analytisch sind. Solche Gleichungen treten vielfach in physikalischen Anwendungen auf. Man interessiert sich für Potenzreihenentwicklungen und notfalls für Varianten solcher Ansätze.

Gilt  $M(x_0) \neq 0$ , so kann man in einer Umgebung von  $x_0$  durch  $M$  dividieren und erhält

$$(2) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0; \quad y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = u_1,$$

mit analytischen Funktionen  $a, b$ . Hierzu gilt:

**(5.1) Satz.** Das Anfangswertproblem (2) besitzt in einer Umgebung von  $x_0$  eine eindeutige Lösung, welche analytisch ist.

**Beweis** (sehr skizzenhaft): Nach Transformation auf ein System erster Ordnung (vgl. Kapitel I, (2.6)) ist dies eine Konsequenz von Kapitel I, (6.10) und (6.11). Wir wollen aber die rekursive Bestimmung der Koeffizienten hier direkt ansetzen; CE setzen wir  $x_0 = 0$ :

Mit  $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ,  $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$  und dem Ansatz  $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k$  ergibt sich

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v_{k+1}x^k, \quad \varphi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)v_{k+2}x^k.$$

Mit dem CAUCHY-Produkt für Reihen ergibt sich

$$a(x) \cdot \varphi'(x) = \sum_{l \geq 0} \left( \sum_{j=0}^l (j+1)v_{j+1}a_{l-j} \right) x^l,$$

$$b(x) \cdot \varphi(x) = \sum_{l \geq 0} \left( \sum_{j=0}^l v_j b_{l-j} \right) x^l;$$

also mit Koeffizientenvergleich die Rekursion

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_1 \end{array} \right\} \text{ aus den Anfangsbedingungen;}$$

$$(l+1)(l+2)v_{l+2} + \sum_{j=0}^l (j+1)v_{j+1}a_{l-j} + \sum_{j=0}^l v_j b_{l-j} = 0; \quad l \geq 0.$$

Ein ausführlicher Beweis (ohne Rückgriff auf die Resultate von Kap. I) findet sich im Buch von Aulbach. □

**(5.2) Beispiel.** Für

$$y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

hat man in der Notation im Beweis von (5.1):  $a_i = 0$  für alle  $i$ ;  $b_2 = 1$ ,  $b_i = 0$  für alle  $i \neq 2$ .

Die Rekursion liefert also

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 0;$$

$$2v_2 = 0, \quad 6v_3 = 0;$$

$$(l+1)(l+2)v_{l+2} = -v_{l-2} \text{ für alle } l \geq 2.$$

Also  $v_l = 0$  für  $l \notin 4\mathbb{Z}$  und

$$(4m+3)(4m+4)v_{4m+4} = -v_{4m} \text{ für alle } m \geq 0.$$

Daraus lässt sich leicht eine (einigermaßen) geschlossene Formel bestimmen.

Von dieser Warte aus haben wir kaum Neues im Vergleich zu Kapitel I, § 6. Die Rekursionen sind sogar relativ freundlich. Aber in Anwendungen treten sehr oft Gleichungen der Form (1) mit  $M(x_0) = 0$  auf; also "singulare Fälle". Betrachten wir einige davon:

**(5.3) Beispiele.** (a)  $xy'' + y = 0$ .

Der Ansatz  $\varphi(x) = \sum_{k \geq 0} v_k x^k$  für eine Lösung liefert  $x \cdot \varphi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)v_{k+1}x^k$ ; Koeffizientenvergleich ergibt also

$$k(k+1)v_{k+1} + v_k = 0, \quad k \geq 0.$$

Dies erzwingt  $v_0 = 0$ . Für beliebige Vorgabe von  $v_1$  sind die restlichen  $v_k$  durch die Rekursion eindeutig bestimmt; man erhält damit (bis auf skalare Vielfache) eine analytische Lösung. Ein analytisches Fundamentalsystem existiert nicht.

(b)  $4x^2y'' + y = 0$ .

Der Ansatz  $\varphi(x) = \sum_{k \geq 0} v_k x^k$  liefert hier die Gleichungen

$$(4k(k-1) + 1)v_k = 0 \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Also sind alle  $v_k = 0$ ,  $\varphi = 0$  ist die einzige Lösung, die in 0 analytisch ist.

Es liegt hier eine EULERSche Differentialgleichung vor; der Ansatz  $\psi(x) = x^\beta$  für eine Lösung auf  $(0, \infty)$ , mit zu bestimmendem Parameter  $\beta$ , liefert bei Einsetzen:

$$0 = 4\beta(\beta-1) + 1 = (2\beta-1)^2$$

als notwendige und hinreichende Bedingung.

Also ist  $\varphi_1(x) = x^{1/2}$  eine Lösung auf  $(0, \infty)$  und  $\varphi_2(x) = \ln x \cdot x^{1/2}$  ist eine weitere, wie Nachrechnen zeigt.

Das letzte Beispiel liefert eine Motivation für den Lösungsansatz bei Gleichungen folgender Gestalt:

$$(3) \quad x^2y'' + x \cdot a(x)y' + b(x)y = 0,$$

mit analytischen  $a, b$ . Sie entstehen aus (1) durch einfache Umformung, falls  $M$  bei 0 eine doppelte Nullstelle und  $A$  bei 0 eine Nullstelle hat.

Im Folgenden sei  $a(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ ,  $b(x) = \sum_{i \geq 0} b_i x^i$ .

**(5.4) Lemma.** (a) Der Ansatz  $\varphi(x) = x^\beta \cdot \sum_{k \geq 0} v_k x^k$  für eine Lösung auf  $(0, \delta)$  (wobei  $\delta > 0$  geeignet), mit  $v_0 \neq 0$  und einem zu bestimmenden Parameter  $\beta$ , führt auf die Bedingungen

$$((\beta+k)(\beta+k-1+a_0) + b_0)v_k + \sum_{j=0}^{k-1} (\beta+j)v_j a_{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} v_j b_{k-j} = 0, \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

(b) Die Bedingung für  $k = 0$  liefert die "Indexgleichung"

$$\beta(\beta-1+a_0) + b_0 = 0.$$

(c) Ist  $\beta$  eine Nullstelle der Indexgleichung, aber  $\beta+l$  keine Nullstelle für alle  $l \in \mathbb{N}$ , so liefert die Bedingung in (a) eine Rekursion zur sukzessiven Berechnung der  $v_k$ .

**Beweis.** (a) folgt durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich; (b) ist dann eine direkte Konsequenz aus  $v_0 \neq 0$  und (c) ist offensichtlich.  $\square$



**(5.5) Bemerkung.** Die Indexgleichung liefert ein quadratisches Polynom für  $\beta$ ; man erhält also höchstens zwei Möglichkeiten. Ist  $\beta = \mu + i\nu$  nicht reell, so erinnere man sich z. B. an

$$x^\beta = \exp(\beta \ln x) = e^{\mu \ln x} \cdot (\cos(\nu \ln x) + i \sin(\nu \ln x))$$

und nehme Real- und Imaginärteil von  $\varphi$ .

Zum Beweis des folgenden Satzes fehlen im Wesentlichen die Konvergenzaussagen und die Diskussion der Sonderfälle, wenn die Differenz  $\beta_2 - \beta_1$  der beiden Nullstellen der Indexgleichung eine ganze Zahl ist. In den Lehrbüchern von Aulbach und Walter wird dies ausgeführt.

**(5.6) Satz.** Gegeben sei das System (3), und die zugehörige Indexgleichung besitze die Nullstellen  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , mit  $\operatorname{Re} \beta_1 \geq \operatorname{Re} \beta_2$ .

(a) Dann existiert eine Lösung der Gestalt

$$\varphi_1(x) = x^{\beta_1} \cdot \psi_1(x) \quad \text{für } x > 0,$$

wobei  $\psi_1$  analytisch ist.

(b) Ist  $\beta_1 - \beta_2$  keine ganze Zahl, so existiert eine Lösung

$$\varphi_2(x) = x^{\beta_2} \cdot \psi_2(x) \quad \text{für } x > 0,$$

mit analytischem  $\psi_2$ ; und  $\varphi_1, \varphi_2$  bilden ein Fundamentalsystem.

(c) Ist  $\beta_1 - \beta_2$  eine ganze Zahl, so existiert eine Lösung

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \cdot \ln x + x^{\beta_2} \cdot \psi_2(x),$$

mit analytischem  $\psi_2$ ; und  $\varphi_1, \varphi_2$  bilden ein Fundamentalsystem.

**(5.7) Beispiel.** Es sei  $\alpha \geq 0$  ein reeller Parameter. Die BESSELSche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

lässt sich für  $x > 0$  wie folgt behandeln:

Die Indexgleichung ist

$$\beta^2 - \alpha^2 = 0;$$

also hat man  $\beta_1 = \alpha, \beta_2 = -\alpha$ .

Im Folgenden behandeln wir nur den Fall, dass  $2\alpha \notin \mathbb{N}_0$ , also treffen (5.6) (a) und (b) zu.

Für  $\beta_1 = \alpha$  ergeben die Rekursionen aus Lemma (5.4):

$(2\alpha + 1)v_1 = 0$ , also  $v_1 = 0$  und weiter

$$k(2\alpha + k)v_k + v_{k-2} = 0 \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Also  $v_{2m+1} = 0$  für alle  $m \geq 0$  und

$$4m(m + \alpha)v_{2m} = -v_{2(m-1)}.$$

Mit  $v_0 := 1$  erhält man

$$v_{2m} = \frac{(-1)^m}{4^m \cdot m! (\alpha + 1) \cdots (\alpha + m)}$$

und die Lösung

$$\varphi_1(x) = x^\alpha \cdot \sum_{m \geq 0} v_{2m} x^{2m}.$$

Analog für  $\beta_2 = -\alpha$ :

$$v_{2m}^* = \frac{(-1)^m}{4^m \cdot m! (-\alpha + 1) \cdots (-\alpha + m)}$$

und Lösung

$$\varphi_2(x) = x^{-\alpha} \cdot \sum_{m \geq 0} v_{2m}^* x^{2m}.$$

Die beiden Potenzreihen haben ersichtlich Konvergenzradius  $\infty$ , also existieren Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  auf  $(0, \infty)$ . Die einzigen Lösungen der BESSEL-Gleichung, welche für  $x \downarrow 0$  beschränkt bleiben, sind übrigens die Vielfachen von  $\varphi_1$ . Argumente dieser Art werden in Anwendungen gelegentlich benutzt.

### Anmerkungen zu Kapitel II

Zu linearen Gleichungen zweiter Ordnung siehe WALTER, Kap. V. Reihenentwicklungen werden dort in §24 behandelt.



### III. Abhängigkeitssätze

#### §1. Fundamentale Abschätzungen und stetige Abhängigkeit

In diesem Paragrafen geht es um Bedingungen dafür, dass (und in welchem Sinn) sich die Lösungen einer Differentialgleichung nicht zu stark verändern, wenn man Parameter oder Anfangswerte nur wenig verändert. Dazu benötigen wir das

**(1.1) Lemma.** Seien  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes Intervall und  $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Es sei  $\phi(a) < \psi(a)$ . Dann liegt genau einer der beiden folgenden Fälle vor:

- (i)  $\phi(x) < \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- (ii) Es gibt ein  $x_0 \in (a, b]$ , so dass  $\phi(x) < \psi(x)$  für alle  $x \in [a, x_0)$ ,  $\phi(x_0) = \psi(x_0)$  und

$$(D^- \phi)(x_0) := \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\phi(x_0) - \phi(x_0 - h)}{h} \geq (D^- \psi)(x_0).$$

**Beweis.** Gilt (i) nicht, so existiert  $x_0 := \inf\{x \in [a, b]; \phi(x) \geq \psi(x)\}$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $\phi$  und  $\psi$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $\phi(x) < \psi(x)$  für alle  $x \in [a, a + \varepsilon)$ ; also ist  $x_0 > a$ . Weiter folgt auch  $\phi(x_0) \geq \psi(x_0)$  wegen Stetigkeit. Die Definition von  $x_0$  liefert aber auch

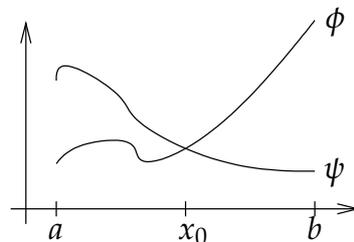
$$\phi(x_0) - \psi(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} (\phi(x) - \psi(x)) \leq 0,$$

also insgesamt  $\phi(x_0) = \psi(x_0)$ . Für  $0 < h < x_0 - a$  gilt  $\phi(x_0 - h) < \psi(x_0 - h)$ , also

$$\frac{\phi(x_0) - \phi(x_0 - h)}{h} > \frac{\psi(x_0) - \psi(x_0 - h)}{h}$$

Der Limes superior  $h \downarrow 0$  auf beiden Seiten liefert

$$(D^- \phi)(x_0) \geq (D^- \psi)(x_0).$$



Man nennt  $(D^- \phi)(x_0)$  die linksseitige obere DINI-Derivierte von  $\phi$  bei  $x_0$ . Sie existiert für beliebige stetige Funktionen.

**(1.2) Bemerkung.** Wir benutzen hier Eigenschaften des Limes superior. Ist  $\gamma$  eine Funktion auf einem Intervall  $(x_0, x_1)$ , so ist

$$\limsup_{x \downarrow x_0} \gamma(x) := \inf_{\varepsilon > 0} \left( \sup_{x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)} \gamma(x) \right).$$

Dieser existiert stets in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Falls  $\gamma_1(x) \leq \gamma_2(x)$  für alle  $x \in (x_0, x_1)$ , so ist  $\limsup_{x \downarrow x_0} \gamma_1(x) \leq \limsup_{x \downarrow x_0} \gamma_2(x)$ .

Wenn  $\lim_{x \downarrow x_0} \gamma(x)$  existiert, so ist dieser Grenzwert gleich  $\limsup_{x \downarrow x_0} \gamma(x)$ .

**(1.3) Beispiel.** Seien  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar. Für eine Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  sei  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|f(x)\|$ . Dann gilt für jedes  $x_0 \in (a, b)$

$$D^- \phi(x_0) \leq \|f'(x_0)\|.$$

Denn für  $h > 0$  gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\frac{\phi(x_0) - \phi(x_0 - h)}{h} = \frac{\|f(x_0)\| - \|f(x_0 - h)\|}{h} \leq \left\| \frac{1}{h} (f(x_0) - f(x_0 - h)) \right\|.$$

Der Limes superior  $h \downarrow 0$  auf beiden Seiten ergibt

$$(D^- \phi)(x_0) \leq \|f'(x_0)\|.$$

**(1.4) Satz.** (Abschätzungssatz bei LIPSCHITZ-Bedingung) Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, die (bezüglich einer Norm  $\|\cdot\|$ ) der LIPSCHITZ-Bedingung

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in G$$

mit einer LIPSCHITZ-Konstante  $L > 0$  genügt. Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in I.$$

Weiter sei  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Näherungslösung in dem Sinne, dass  $z$  differenzierbar ist und es  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\|y(x_0) - z(x_0)\| \leq \gamma, \quad \|z'(x) - f(x, z(x))\| \leq \delta \quad \text{für alle } x \in I.$$

Dann gilt für alle  $x \in I$  die Abschätzung

$$\|y(x) - z(x)\| \leq \gamma \cdot e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L} \cdot (e^{L|x-x_0|} - 1).$$

**Beweis.** Es sei  $b \in I$  mit  $b > x_0$ , weiter  $\bar{\gamma} > \gamma$ ,  $\bar{\delta} > \delta$  und

$$\psi(x) := \bar{\gamma} e^{L(x-x_0)} + \frac{\bar{\delta}}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \quad \text{für } x \in [x_0, b].$$

Dann gilt nach Konstruktion

$$\psi(x_0) = \bar{\gamma} \quad \text{und} \quad \psi'(x) = \bar{\delta} + L \cdot \psi(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leq x \leq b.$$

Für  $\phi(x) := \|y(x) - z(x)\|$  gilt nun  $\phi(x_0) \leq \gamma < \bar{\gamma}$  und mit (1.2) auch

$$\begin{aligned} D^- \phi(x) &\leq \|y'(x) - z'(x)\| = \|f(x, y(x)) - z'(x)\| \\ &\leq \|f(x, y(x)) - f(x, z(x))\| + \|f(x, z(x)) - z'(x)\| \\ &\leq L \cdot \|y(x) - z(x)\| + \delta \\ &< L \cdot \phi(x) + \bar{\delta} \end{aligned}$$

für alle  $x \in (x_0, b]$ . Aus (1.1) folgt  $\phi(x) < \psi(x)$  für alle  $x \in [x_0, b]$ , denn gäbe es ein kleinstes  $x_1$  mit  $\phi(x_1) = \psi(x_1)$ , so folgte der Widerspruch  $D^- \phi(x_1) < \psi'(x_1) = D^- \psi(x_1)$ . Der Grenzübergang  $\bar{\gamma} \downarrow \gamma, \bar{\delta} \downarrow \delta$  zeigt nun

$$\phi(x) \leq \gamma e^{L(x-x_0)} + \frac{\delta}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1)$$

für alle  $x \in [x_0, b]$ .

Für  $x < x_0$  argumentiert man analog oder durch Rückführung auf den behandelten Fall mit

$$\tilde{f}(x, y) := f(-x, y), \quad \tilde{y}(x) := y(-x). \quad \square$$

Im Fall  $\gamma = \delta = 0$  erhält man aus (1.4) insbesondere den Eindeutigkeitsatz Kapitel I, (4.10) zurück.

**(1.5) Satz über die stetige Abhängigkeit.** Seien  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung, die einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügt,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{mit} \quad x_0 \in I \quad \text{und} \quad (x_0, y_0) \in G.$$

Dann gibt es ein  $\alpha > 0$  und ein  $L > 0$ , so dass die kompakte Teilmenge

$$S_\alpha := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}^n; \|y - \phi(x)\| \leq \alpha\}$$

des  $\mathbb{R}^n$  in  $G$  enthalten ist und

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle} \quad (x, y), (x, \tilde{y}) \in S_\alpha$$

gilt. Die Lösung  $\phi(x)$  hängt in folgendem Sinne stetig vom Anfangswert und von  $f$  ab: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass jede Lösung  $z(x)$  eines "gestörten" Anfangswertproblems

$$z' = g(x, z), \quad z(x_0) = z_0$$

mit einem auf  $S_\alpha$  stetigen  $g$ , das einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügt, mit den Eigenschaften

$$\|y_0 - z_0\| < \delta, \quad \|g(x, y) - f(x, y)\| < \delta \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in S_\alpha,$$

auf ganz  $I$  existiert und der Abschätzung

$$\|z(x) - \phi(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in I$$

genügt.

**Beweis.** Bekanntlich haben disjunkte Teilmengen  $M_1, M_2$  des  $\mathbb{R}^n$  positiven Abstand, wenn  $M_1$  kompakt und  $M_2$  abgeschlossen ist. Weil die kompakte Menge  $\{(x, \phi(x)); a \leq x \leq b\}$  in  $G$  enthalten ist, hat sie also von  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus G$  positiven Abstand  $\rho$ . Für  $\alpha := \rho/2$  ist deshalb  $S_\alpha \subset G$  und  $S_\alpha$  ist offensichtlich abgeschlossen und beschränkt in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , also kompakt.

Weil  $f$  auf  $G$  einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügt und  $S_\alpha$  kompakt ist, genügt  $f|_{S_\alpha}$  nach Kapitel I, (4.3) einer LIPSCHITZ-Bedingung. Also existiert  $L$  wie behauptet.

Sei nun  $z(x)$  Lösung des Anfangswertproblems

$$z' = g(x, z), \quad z(x_0) = z_0$$

auf einem Intervall  $I' \subset I$ .

Ist  $z : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I' \subset I$ ,  $x_0 \in I'$ , so gilt nach (1.3) mit  $\gamma = \delta$

$$(*) \quad \|\phi(x) - z(x)\| \leq \delta \left[ e^{L|x-x_0|} + \frac{1}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1) \right] \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Nun wählt man  $\delta > 0$  so klein, dass die rechte Seite von  $(*)$  für  $x \in I$  immer  $\leq \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$  ist, also  $(x, z(x)) \in S_{\alpha/2}$  für alle  $x \in I'$ . Nach Kapitel I, Satz (4.12) und Satz (4.14) kann man die Lösung  $z$  zu einer Lösung auf  $I$  fortsetzen, die dann ebenfalls  $(*)$  erfüllt.  $\square$

**(1.6) Korollar.** (Stetige Abhängigkeit von Anfangswert und Parametern) Gegeben seien eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und eine stetige Abbildung  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y, p) \mapsto h(x, y, p)$ , die auf  $V$  einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich  $y$  genüge; d. h. zu jedem Punkt von  $V$  existiert eine Umgebung  $W$  und ein  $L > 0$  so, dass

$$\|h(x, y, p) - h(x, \tilde{y}, p)\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y, p), (x, \tilde{y}, p) \in W,$$

wobei  $\|\cdot\|$  eine fest gewählte Norm auf  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$  bezeichne.

Sei nun  $(x_0, y_0, p_0) \in V$ ,  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall mit  $x_0 \in [a, b]$  und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lösung des Anfangswertproblems  $y' = h(x, y, p_0)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es dann ein  $\delta > 0$  so, dass für alle  $y^*, p^*$  mit  $\|y^* - y_0\| < \delta$  und  $\|p^* - p_0\| < \delta$  die Lösung  $\psi$  von  $y' = h(x, y, p^*)$ ,  $y(x_0) = y^*$  auf ganz  $I$  existiert und die Ungleichung

$$\|\phi(x) - \psi(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I$$

erfüllt ist.

**Beweis.** Für  $\alpha > 0$  setze

$$\tilde{S}_\alpha := \{(x, y, p) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \|y - \phi(x)\| + \|p - p_0\| \leq \alpha\}.$$

Dies ist eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und wie im Beweis von (1.5) folgt die Existenz eines  $\alpha > 0$  mit  $\tilde{S}_\alpha \subset V$ . Weiter gibt es zu  $\delta > 0$  ein  $\rho > 0$  so, dass für jedes  $\alpha < \rho$  gilt:

$$\|h(x, y, p) - h(x, y, p_0)\| < \delta$$

für alle  $(x, y, p)$  und  $(x, y, p_0) \in \tilde{S}_\alpha$ , denn  $h$  ist stetig. Nun verwende (1.5) mit  $f(x, y) := h(x, y, p_0)$  und  $g(x, y) := h(x, y, p)$ .  $\square$

Eine Anwendung ist die folgende:

**(1.7) Satz.** (Differential-Ungleichungen)

Es sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  offen und die stetige Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle eine lokale LIPSCHITZ-Bedingung. Es sei  $\psi$  eine Lösung von  $y' = f(x, y)$  auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$ , und die stetige Abbildung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle

$$\varphi(a) \leq \psi(a) \quad \text{und} \quad D^- \varphi(x) \leq f(x, \varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Dann gilt  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .

**Beweis.** Für  $p \geq 0$  sei  $\psi_p$  die Lösung von

$$y' = f(x, y) + p, \quad y(a) = \psi(a) + p;$$

insbesondere also  $\psi_0 = \psi$ . Nach (1.6) existiert  $\psi_p$  für alle  $x \in [a, b]$ , sofern nur  $p$  hinreichend klein ist, und es gilt  $\lim_{p \rightarrow 0} \psi_p(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Es reicht also zu zeigen, dass  $\varphi(x) < \psi_p(x)$  für alle  $p > 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

Sei  $p > 0$ . Jedenfalls gilt  $\varphi(a) < \psi_p(a)$ . Wäre die Ungleichung nicht für alle  $x \in [a, b]$  gültig, so gäbe es nach (1.1) ein  $x_0 \in (a, b]$  derart, dass

$$\varphi(x) < \psi_p(x) \quad \text{für } a \leq x < x_0, \quad \varphi(x_0) = \psi_p(x_0)$$

und

$$\begin{aligned} D^- \varphi(x_0) &\geq D^- \psi_p(x_0) = \psi_p'(x_0) = f(x_0, \psi_p(x_0)) + p \\ &= f(x_0, \varphi(x_0)) + p; \end{aligned}$$

dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Schließlich soll hier noch eine weitere (berühmte) Abschätzung bewiesen werden; sie wird im folgenden Paragraphen Anwendung finden.

**(1.8) Lemma.** (GRONWALL) Es sei  $a < b \leq \infty$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gebe reelle  $\alpha, \beta$  mit  $\beta > 0$ , so dass

$$\varphi(x) \leq \alpha + \beta \int_a^x \varphi(t) dt \quad \text{für alle } x \in [a, b).$$

Dann ist

$$\varphi(x) \leq \alpha \cdot e^{\beta(x-a)} \quad \text{für alle } x \in [a, b).$$

**Beweis.** Es sei  $\bar{\alpha} > \alpha$  und  $\psi(x) := \bar{\alpha} \cdot e^{\beta(x-a)}$ ,  $x \in [a, b)$ . Nach Konstruktion ist  $\psi' = \beta \cdot \psi$ ,  $\psi(a) = \bar{\alpha}$ ; also (vgl. Kapitel I, Lemma (4.1))

$$\psi(x) = \bar{\alpha} + \beta \int_a^x \psi(t) dt.$$



Wir zeigen  $\varphi(x) < \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ ; daraus folgt die Behauptung mit  $\bar{\alpha} \rightarrow \alpha$ . Jedenfalls ist  $\varphi(a) < \psi(a)$ . Wäre die Ungleichung nicht für alle  $x \in [a, b]$  gültig, so gäbe es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $\varphi(x) < \psi(x)$  für alle  $x \in [a, x_0)$  und  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ . Damit aber

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &\leq \alpha + \beta \int_a^{x_0} \varphi(t) dt \leq \alpha + \beta \int_a^{x_0} \psi(t) dt \\ &< \bar{\alpha} + \beta \int_a^{x_0} \psi(t) dt = \psi(x_0) \end{aligned}$$

und Widerspruch. □

## §2. Autonome Gleichungen: Eigenschaften des lokalen Flusses

In diesem Abschnitt behandeln wir stets folgende Situation:

- (A)  $U \subset \mathbb{R}^n$  sei offen und nichtleer,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \mapsto f(y)$  (sei stetig und) genüge einer lokalen LIPSCHITZ-Bedingung. Betrachtet wird die autonome Differentialgleichung  $y' = f(y)$  auf  $U$ .

Aus Kapitel I ist bekannt, dass für  $z \in U$  das Anfangswertproblem  $y' = f(y)$ ,  $y(0) = z$  eine eindeutige Lösung  $\Phi(x, z)$  besitzt, die (als Funktion von  $x$ ) auf einem offenen Intervall  $I_{\max}(z)$  existiert und nicht über dieses Intervall hinaus fortgesetzt werden kann. (Siehe Kapitel I, Satz (4.14) und Definition (5.1).)

Die Abbildung  $\Phi$  wird bekanntlich auch lokaler Fluss der Gleichung genannt. Wir werden sie im Folgenden nicht nur als Funktion von  $x$  (bei festgehaltenem  $z$ ) betrachten, sondern als Funktion der Variablen  $x$  und  $z$ , die auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  definiert ist. Aus Satz (1.5) erhält man :

**(2.1) Satz.** Gegeben sei (A). Dann ist

$$U_f := \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; z \in U \text{ und } x \in I_{\max}(z)\}$$

eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und

$$\Phi : U_f \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad (x, z) \mapsto \Phi(x, z)$$

ist stetig.

**Beweis.** Sei  $(x^*, z^*) \in U_f$  und  $a > 0$  so, dass  $\Phi(x, z^*)$  auf  $[x^* - a, x^* + a]$  existiert. Nach (1.5) gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass  $\Phi(x, z)$  für alle  $(x, z)$  mit  $\|z - z^*\| < \delta$  und  $x \in (x^* - a, x^* + a)$  existiert. Also ist  $U_f$  offen.

Weiter sei  $(x^*, z^*) \in U_f$  und  $((x_j, z_j))_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $U_f$  mit Grenzwert  $(x^*, z^*)$ . Es gilt

$$\|\Phi(x_j, z_j) - \Phi(x^*, z^*)\| \leq \|\Phi(x_j, z_j) - \Phi(x^*, z_j)\| + \|\Phi(x^*, z_j) - \Phi(x^*, z^*)\|.$$

Man beachte dazu, dass nach Satz (1.5)  $\Phi(x^*, z_j)$  für alle hinreichend großen  $j$  existiert. Nun sei  $K$  eine kompakte Umgebung von  $(x^*, z^*)$ . Für alle hinreichend großen  $j$  ist dann

$z_j \in K$  und wie im Beweis von Kapitel I, Satz (4.12) lässt sich der erste Term rechts durch  $M \cdot |x^* - x_j|$  mit einer geeigneten Konstante  $M$  abschätzen. Weil nach (1.5) auch  $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(x^*, z_j) = \Phi(x^*, z^*)$  gilt, folgt insgesamt  $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(x_j, z_j) = \Phi(x^*, z^*)$ .  $\square$

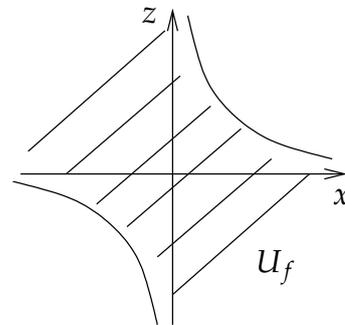
**(2.2) Beispiel.** Man betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y) = y^2, \quad \text{also } y' = y^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Die Lösung lässt sich elementar bestimmen (separierbare Gleichung; vgl. Kapitel I, Beispiel (3.3) b))

$$\Phi(x, z) = \frac{z}{1 - xz} \quad \text{für} \quad \begin{cases} x \in (-\infty, 1/z), & \text{falls } z > 0 \\ x \in (1/z, \infty), & \text{falls } z < 0 \\ x \in \mathbb{R}, & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

Also ist  $U_f$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  (Gebiet zwischen zwei Hyperbeln) und  $\Phi$  ist eine stetige Funktion von  $x$  und dem Anfangswert  $z$ .



**(2.3) Bemerkung.** a) Die Stetigkeitsaussage in (2.1) werden wir in der Folge öfters benutzen.

b) Eine für die Theorie und die Praxis interessante Konsequenz soll kurz angegeben werden.

In der Situation (A) gebe es eine kompakte und konvexe Teilmenge  $K$  von  $U$  mit der Eigenschaft: Ist  $z \in K$ , so auch  $\Phi(x, z)$  für alle  $x \in I_{\max}(z)$ ,  $x > 0$ .

Dann enthält  $K$  einen stationären Punkt.

Eine Skizze des Beweises geht wie folgt: Sei  $z \in K$ . Nach Kapitel I, Satz (5.4) existiert  $\Phi(x, z)$  für alle reellen  $x \geq 0$ ; und nach Satz (2.1) ist für jedes  $x^* \geq 0$  die Abbildung

$$\Phi(x^*, \cdot) : K \rightarrow K; \quad z \mapsto \Phi(x^*, z)$$

stetig. Nach dem BROUWERSchen Fixpunktsatz (der in der Höheren Analysis oder in der Topologie bewiesen wird) besitzt  $\Phi(x^*, \cdot)$  einen Fixpunkt  $v(x^*)$ . Für  $l \in \mathbb{N}$  betrachte nun die Folge der  $v(1/l)$  in  $K$ . Weil  $K$  kompakt ist, gibt es einen Häufungspunkt  $w$  dieser Folge in  $K$ . Man führt nun die Annahme  $f(w) \neq 0$  zum Widerspruch, also folgt  $f(w) = 0$ .

Die Stetigkeitsaussage aus (2.1) sollte sich verbessern lassen, wenn die rechte Seite der Differentialgleichung etwa stetig differenzierbar ist. Im Beispiel (2.2) ist  $\Phi$  offensichtlich (als rationale Funktion von  $x$  und  $z$ ) beliebig oft differenzierbar.

**(2.4) Bemerkung.** Die partielle Ableitung  $D_1\Phi(x, z) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, z)$  existiert in der Situation (A) auf jeden Fall: Weil  $x \mapsto \Phi(x, z)$  die Differentialgleichung löst, ist die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, z) = f(\Phi(x, z))$$

erfüllt.

Ist (A) gegeben und  $f$  stetig differenzierbar, so führt die *Annahme*, dass  $\Phi(x, z)$  genügend oft differenzierbar ist, und also die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden kann, auf

$$D_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, z)\right) = Df(\Phi(x, z)) \cdot D_2\Phi(x, z)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}(D_2\Phi(x, z)) = Df(\Phi(x, z)) \cdot D_2\Phi(x, z).$$

Hier bezeichnet  $D_2\Phi$  die partielle Ableitung von  $\Phi$  nach  $z$ . Ist komponentenweise

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^t \quad \text{und} \quad z = (z_1, \dots, z_n)^t,$$

so gilt

$$D_2\Phi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Unter der obigen Annahme löst also  $D_2\Phi(x, z)$  die lineare Matrix-Differentialgleichung

$$Y' = Df(\Phi(x, z)) \cdot Y, \quad Y(0) = E.$$

Der Anfangswert ergibt sich aus

$$\Phi(0, z) = z, \quad \text{also} \quad D_2\Phi(0, z) = E.$$

Damit haben wir einen Kandidaten für die partielle Ableitung von  $\Phi$  nach  $z$  gefunden. Nun zeigen wir, dass der Kandidat auch das Gewünschte erfüllt.

**(2.5) Satz.** ( *$C^1$ -Abhängigkeit*)

Gegeben sei (A), und zusätzlich sei  $f$  eine  $C^1$ -Funktion, also stetig differenzierbar. Dann existiert die partielle Ableitung  $D_2\Phi(x, z)$  und ist stetig; sie ist bei vorgegebenem  $z$  gleich der Lösung  $B(x, z)$  der Matrix-Differentialgleichung

$$Y' = Df(\Phi(x, z)) \cdot Y, \quad Y(0) = E.$$

Insbesondere ist  $\Phi$  damit eine  $C^1$ -Abbildung von  $U_f$  nach  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** (i) Hilfssatz aus der Analysis: Es sei  $K \subset U$  kompakt und konvex. Dann gibt es eine stetige Abbildung

$$R : K \times K \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}), \quad (v, w) \mapsto R(v, w),$$

so dass auf  $K \times K$  gilt

$$f(w) - f(v) = Df(v) \cdot (w - v) + R(v, w) \cdot (w - v);$$

und zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\|R(v, w)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } v, w \in K \quad \text{mit} \quad \|v - w\| < \delta.$$

(Hier und im Folgenden bezeichnet  $\|\cdot\|$  zum einen eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und zum anderen eine Norm auf  $\text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ , so dass

$$\|A \cdot y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$$

für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ . Dies gilt etwa für die 2-Normen für Vektoren und Matrizen; vgl. Kapitel II, Lemma (2.2).)

Zum Beweis der Hilfsaussage beachte die Konvexität von  $K$  und setze

$$q(t) := f(v + t(w - v)) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1,$$

mit festgehaltenen  $v, w \in K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f(w) - f(v) &= q(1) - q(0) \\ &= \int_0^1 q'(t) dt = \int_0^1 Df(v + t(w - v)) \cdot (w - v) dt \\ &= G(v, w) \cdot (w - v), \end{aligned}$$

mit

$$G(v, w) := \int_0^1 Df(v + t(w - v)) dt.$$

Nach bekannten Sätzen über parameterabhängige Integrale ist  $G$  stetig auf  $K \times K$ ; und es gilt offenbar  $G(v, v) = Df(v)$ . Mit  $R(v, w) := G(v, w) - Df(v)$  folgt die Behauptung. (Beachte, dass  $R$  gleichmäßig stetig auf  $K \times K$  und  $R(v, v) = 0$  für alle  $v \in K$ .)

- (ii) Im Folgenden sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, und  $\delta > 0$  gemäß (i) gewählt. Sei  $(x, z) \in U_f$  und  $h \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $(x, z + h) \in U_f$ . (Dies ist sicher erfüllt, sobald nur  $\|h\|$  klein genug ist.) Es gelten dann die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \Phi(x, z) &= z + \int_0^x f(\Phi(t, z)) dt \\ \Phi(x, z + h) &= z + h + \int_0^x f(\Phi(t, z + h)) dt. \end{aligned}$$

Für  $x > 0$  ergibt dies - mit Standardabschätzungen -

$$\|\Phi(x, z + h) - \Phi(x, z)\| \leq \|h\| + \int_0^x \|f(\Phi(t, z + h)) - f(\Phi(t, z))\| dt.$$

(Der Fall  $x < 0$  lässt sich analog behandeln. Im Folgenden betrachten wir nur  $x > 0$ .)

Nun sei  $V$  eine offene Umgebung von  $\{\Phi(t, z); 0 \leq t \leq x\}$  derart, dass  $\bar{V}$  kompakt und  $\bar{V} \subset U$ . (Zur Existenz vergleiche Satz (1.5).) Für genügend kleines  $\|h\|$  (CE auch  $\|h\| < \delta$ ) existiert nach (1.5) dann  $\Phi(x, z + h)$ , und  $\{\Phi(t, z + h); 0 \leq t \leq x\} \subset V$ . Sei  $L$  eine

LIPSCHITZ-Konstante für  $f$  auf  $\bar{V}$  (vgl. Kap. I, Bemerkung (4.3)). Dann ergibt die obige Ungleichung weiter

$$\|\Phi(x, z+h) - \Phi(x, z)\| \leq \|h\| + L \cdot \int_0^x \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z)\| dt.$$

Das GRONWALLSche Lemma (1.8) zeigt nun

$$\|\Phi(x, z+h) - \Phi(x, z)\| \leq \|h\| \cdot e^{Lx}.$$

(iii) Benutzt man nochmal die Integralgleichungen aus (ii), sowie

$$B(x, z) \cdot h = h + \int_0^x Df(\Phi(t, z)) B(t, z) \cdot h dt,$$

so erhält man mit analogen Abschätzungen für hinreichend kleines  $\|h\|$  ( $\exists \epsilon \|h\| < \delta$ ):

$$\begin{aligned} & \|\Phi(x, z+h) - \Phi(x, z) - B(x, z) \cdot h\| \\ & \leq \int_0^x \|f(\Phi(t, z+h)) - f(\Phi(t, z)) - Df(\Phi(t, z)) \cdot B(t, z) \cdot h\| dt \\ & \leq \int_0^x \|Df(\Phi(t, z)) \cdot (\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z)) - B(t, z) \cdot h\| dt \\ & \quad + \int_0^x \|R(\Phi(t, z), \Phi(t, z+h)) \cdot (\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z))\| dt, \end{aligned}$$

wobei die Bezeichnungen aus (i) benutzt wurden.

Unter Benutzung der Eigenschaft der Operatornorm lässt sich weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \dots & \leq \int_0^x \|Df(\Phi(t, z))\| \cdot \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z) - B(t, z) \cdot h\| dt \\ & \quad + \int_0^x \|R(\Phi(t, z), \Phi(t, z+h))\| \cdot \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z)\| dt. \end{aligned}$$

Die Operatornorm  $x \mapsto \|Df(x)\|$  ist stetig, also auf der kompakten Menge  $\bar{V}$  durch ein  $M > 0$  beschränkt. Der erste Term lässt sich also durch

$$M \cdot \int_0^x \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z) - B(t, z) \cdot h\| dt$$

abschätzen.

Für den zweiten Term benutze (i) und die Stetigkeit von  $\Phi$ , um zu  $\epsilon > 0$  die Existenz eines  $\delta^* > 0$  zu garantieren, so dass aus  $\|h\| < \delta^*$  schon

$$\|R(\Phi(t, z), \Phi(t, z+h))\| < \epsilon \quad \text{für } 0 \leq t \leq x$$

folgt. Wir können  $\delta < \delta^*$  annehmen. Mit (ii) erhalten wir für  $\|h\| < \delta$

$$\begin{aligned} & \int_0^x \|R(\Phi(t, z), \Phi(t, z+h))\| \cdot \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z)\| dt \\ & < \epsilon \cdot \int_0^x \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z)\| dt \\ & \leq \epsilon \cdot \|h\| \cdot \int_0^x e^{Lt} dt = \epsilon \cdot \|h\| \cdot \frac{1}{L} (e^{Lx} - 1) \\ & = \epsilon \cdot c \cdot \|h\|, \end{aligned}$$

wobei  $c$  eine von  $h$  unabhängige Konstante ist.

Insgesamt hat man für  $\|h\| < \delta$  also

$$\begin{aligned} & \|\Phi(x, z+h) - \Phi(x, z) - B(x, z) \cdot h\| \\ & \leq \varepsilon \cdot c \cdot \|h\| + M \cdot \int_0^x \|\Phi(t, z+h) - \Phi(t, z) - B(t, z) \cdot h\| dt, \end{aligned}$$

und GRONWALLS Lemma zeigt

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, z+h) - \Phi(x, z) - B(x, z) \cdot h\| & \leq \varepsilon \cdot c \cdot e^{Mx} \cdot \|h\| \\ & =: \varepsilon \cdot c^* \cdot \|h\|, \end{aligned}$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c^*$ .

Für  $h \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

In Anbetracht der Tatsache, dass die  $C^1$ -Eigenschaft sehr aufwendig zu beweisen ist, könnte man befürchten, dass es für höhere Ableitungen noch schlimmer wird. Aber dem ist erfreulicherweise nicht so.

**(2.6) Korollar.** Gegeben sei  $(A)$  und zusätzlich sei  $f$  eine  $C^r$ -Funktion, also  $r$ -mal stetig differenzierbar, mit  $r \geq 2$ . Dann ist auch  $\Phi$  eine  $C^r$ -Abbildung auf  $U_f$ .

**Beweis.** (Skizze). Induktion nach  $r$ , wobei der Induktionsanfang  $r = 1$  in (2.5) gezeigt wurde. Im Induktionsschritt " $r - 1 \mapsto r$ " betrachte auf  $U \times \mathbb{R}^n$  die Gleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= f(y_1) \\ y_2' &= Df(y_1) \cdot y_2, \end{aligned}$$

mit Lösung  $\begin{pmatrix} \Phi(x, z_1) \\ D_2\Phi(x, z_1) \cdot z_2 \end{pmatrix}$  zum Anfangswert  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ .

Weil die rechte Seite der Gleichung  $C^{r-1}$  ist, ist nach Induktionsvoraussetzung auch die Lösung eine  $C^{r-1}$ -Funktion. Das heißt aber, dass  $D_2\Phi$  eine  $C^{r-1}$ -Abbildung ist und hieraus ergibt sich, dass  $\Phi$  selbst eine  $C^r$ -Abbildung ist.  $\square$

**(2.7) Korollar.** (Differenzierbare Abhängigkeit von Parametern)  
Es sei  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  nicht leer und offen und  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(y, p) \mapsto h(y, p)$  sei eine  $C^r$ -Abbildung, mit  $r \geq 1$ .  
Bezeichne mit  $\Psi(x, z, p)$  die Lösung von

$$y' = h(y, p), \quad y(0) = z.$$

Dann ist  $\Psi$  auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  definiert und eine  $C^r$ -Abbildung.

**Beweis.** Benutze (2.5) für

$$\begin{aligned} y_1' &= h(y_1, y_2) \\ y_2' &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } V. \quad \square$$

Anwendungen werden wir in den folgenden Kapiteln sehen.

### **Anmerkungen zu Kapitel III**

Es gibt Varianten und allgemeinere Versionen von GRONWALLS Lemma. Siehe etwa AMANN, Lemma 6.1.

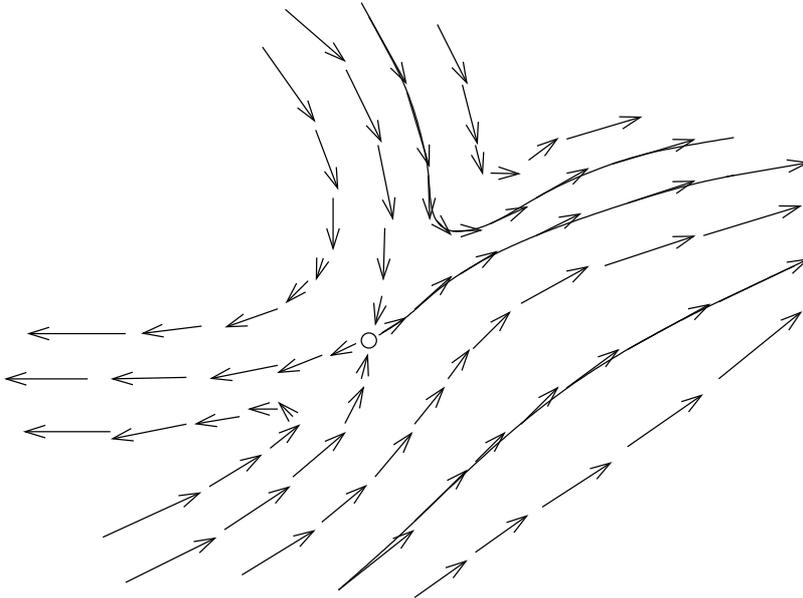
## IV. Autonome Systeme

In diesem Kapitel betrachten wir stets folgende Situation:

- (A\*) Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und nichtleer, sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung, also stetig differenzierbar. Zur Untersuchung steht die autonome Gleichung  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , mit lokalem Fluss  $\Phi(t, y)$ .

Wir ändern also gegenüber vorangegangenen Kapiteln die Bezeichnungen: Die unabhängige Variable ist nun  $t$  (= Zeit), die abhängige nennen wir  $x$ . Der Anfangswert beim lokalen Fluss heißt jetzt (meistens)  $y$ . Außerdem wird  $f$  grundsätzlich als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Zum Teil ist das notwendig, zum Teil geschieht es nur der Einfachheit halber.

Man nennt  $f$  auch ein *Vektorfeld* auf  $U$ . In geometrischer Deutung wird jedem Punkt  $x \in U$  ein Vektor  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  „angeheftet“. Eine Lösungskurve durch  $y \in U$  hat in  $y$  gerade den Tangentenvektor  $f(y)$ , wie die Differentialgleichung zeigt. In Dimension 2 (und mit Einschränkungen in Dimension 3) kann man den geometrischen Sachverhalt durch Skizzen verdeutlichen:



Skizze eines ebenen Vektorfeldes und einiger Lösungsbahnen. Der Kringel  $\circ$  symbolisiert einen stationären Punkt.

### §1. Begriffe und Werkzeuge

In diesem Abschnitt geht es vor allem um Techniken und Resultate, welche den praktischen Umgang mit Differentialgleichungen ermöglichen oder erleichtern.



**(1.1) Definition.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , und eine autonome Differentialgleichung  $\dot{x} = g(x)$  auf der nichtleeren, offenen Menge  $V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $g$  sei  $C^1$ -Abbildung. Weiter sei  $\emptyset \neq U^* \subset U$  offen, und  $\Psi : U^* \rightarrow V$  eine Abbildung. Dann heißt  $\Psi$  *lösungserhaltend* von  $\dot{x} = f(x)$  in  $\dot{x} = g(x)$ , wenn für jede Lösung  $z(t)$  von  $\dot{x} = f(x)$  in  $U^*$  das Bild  $\Psi(z(t))$  eine Lösung von  $\dot{x} = g(x)$  ist.

Es gibt ein handliches Kriterium, um diese Eigenschaft für gegebenes  $\Psi$  zu testen:

**(1.2) Lemma.** Die Voraussetzungen an  $f, g$  und  $\Psi$  seien wie in (1.1), und weiter sei  $\Psi$  eine  $C^1$ -Abbildung. Genau dann ist  $\Psi$  lösungserhaltend von  $\dot{x} = f(x)$  in  $\dot{x} = g(x)$ , wenn die Identität

$$D\Psi(y)f(y) = g(\Psi(y))$$

für alle  $y \in U^*$  gilt.

**Beweis.** Sei  $y \in U^*$  und  $z(t)$  die Lösung von  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = y$ . Dann ist

$$g(\Psi(z(t))) = \frac{d}{dt} \Psi(z(t)) = D\Psi(z(t))\dot{z}(t) = D\Psi(z(t))f(z(t));$$

insbesondere  $g(\Psi(y)) = D\Psi(y)f(y)$ .

Für die umgekehrte Richtung gelte die Identität, und  $z(t)$  löse  $\dot{x} = f(x)$ . Dann

$$\frac{d}{dt} \Psi(z(t)) = D\Psi(z(t))f(z(t)) = g(\Psi(z(t))). \quad \square$$

**(1.3) Beispiele.** a) Für die Chemostat - Gleichung in einer Umgebung des positiven Quadranten  $P \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{aligned} \quad (\text{kurz } \dot{x} = f(x))$$

(wobei  $a, b, c, r, \delta$  positive Konstanten) und  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x_1 + \frac{a}{b} x_2$  berechnet man

$$\begin{aligned} D\Psi(x)f(x) &= \left(1, \frac{a}{b}\right) \cdot \begin{pmatrix} r - \frac{ax_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \frac{bx_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{pmatrix} \\ &= r - \delta \left(x_1 + \frac{a}{b} x_2\right) = g(\Psi(x)) \end{aligned}$$

mit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(y) = r - \delta y$ .

Also ist  $\Psi$  lösungserhaltend von  $\dot{x} = f(x)$  in die (elementare eindimensionale) Gleichung  $\dot{x} = r - \delta x$ . Dies ist bei der Diskussion der Chemostat - Gleichung von großem Nutzen.

b) *Koordinatentransformationen:* Es sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  gegeben, weiter  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Psi : W \rightarrow U$  eine  $C^1$ -Abbildung derart, dass  $D\Psi(x)$  für alle  $x \in W$  invertierbar. Definiere  $f^* : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f^*(x) := D\Psi(x)^{-1}f(\Psi(x))$ . Dann ist - nach Konstruktion -  $\Psi$  lösungserhaltend von  $\dot{x} = f^*(x)$  in  $\dot{x} = f(x)$ .

Fasst man  $\Psi$  als Koordinatentransformation auf, so gibt  $f^*$  "die Differentialgleichung in neuen Koordinaten" an.

c) *Konkretes Beispiel: Polarkoordinaten.* Ist  $f$  auf dem Kreisring

$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_2\}$  gegeben, wobei  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ ,  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ , so ist die Darstellung der Gleichung in Polarkoordinaten wie folgt zu erhalten:

Setze  $W = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; r_1 < r < r_2 \right\}$  und  $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ .

Dann  $\Psi(W) = U$ , und

$$D\Psi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar f\u00fcr alle } \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in W,$$

sowie

$$\begin{aligned} f^* \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} &= D\Psi \left( \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ f_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ f_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) *Spezialfall: Affine Koordinatentransformationen.* Ist  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  gegeben und  $A \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $\Psi(x) = Ax + b$  l\u00f6sungserhaltend von

$$\dot{x} = f^*(x) := A^{-1}f(Ax + b) \quad \text{in} \quad \dot{x} = f(x).$$

F\u00fcr lineare Differentialgleichungen wurde dies schon in Kapitel II, Lemma (2.1) vorgestellt.

Sind  $y \in U$  mit  $f(y) \neq 0$  und  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vorgegeben, so l\u00e4sst sich durch passende Wahl von  $A$  und  $b$  erreichen, dass

$$\Psi(0) = y \quad \text{und} \quad f^*(0) = c.$$

Die n\u00e4chste Aussage zeigt, dass es lokal, nahe nicht station\u00e4ren Punkten, in jeder Dimension eigentlich nur eine autonome Differentialgleichung gibt:

**(1.4) Satz.** (*Begradigungssatz*)

Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  und  $y^* \in U$  sei nicht station\u00e4r f\u00fcr  $f$ . Dann gibt es Umgebungen  $U^*, V^*$  von  $y^*$  in  $U$  und eine invertierbare  $C^1$ -Abbildung  $\Psi : U^* \rightarrow V^*$ , die l\u00f6sungserhaltend ist von

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mit konstanter rechter Seite}) \quad \text{in} \quad \dot{x} = f(x).$$

**Beweis.** Nach Beispiel (1.3) d) d\u00fcrfen wir  $y^* = 0$ ,  $f(y^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  annehmen. Die Idee ist, statt

$x_1, \dots, x_n$  als neue Koordinaten die Zeit  $t$  l\u00e4ngs L\u00f6sungen mit Anfangswert auf der Hyperebene  $x_1 = 0$  sowie  $x_2, \dots, x_n$  zu verwenden. Pr\u00e4zise gesagt: Sei

$$\Psi(x) := \Phi \left( x_1, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right).$$

Nach Kapitel III, Satz (2.1) und Satz (2.5) ist  $\Psi$  in einer Nullumgebung definiert und stetig differenzierbar. Bezeichne die Komponenten von  $\Psi$  mit  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Nun gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi \left( x_1, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = f \left( \Phi \left( x_1, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \right) = f(\Psi(x));$$

anders ausgedrückt

$$D\Psi(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f(\Psi(x)),$$

und  $\Psi$  ist nach (1.2) lösungserhaltend von  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $\dot{x} = f(x)$ .

Insbesondere ist auch  $\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(0) = f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  die erste Spalte der Matrix  $D\Psi(0)$ . Aus

$$\Psi \left( \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \Phi \left( 0, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

folgt weiter direkt  $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0) = \delta_{ij}$  (KRONECKER-Symbol) für  $i, j \geq 2$ , also ist

$$D\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{invertierbar.}$$

Der Satz über die Umkehrfunktion aus der Analysis zeigt nun die lokale Invertierbarkeit von  $\Psi$ . □

Eine lokale Theorie autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen ist also nur bei stationären Punkten interessant. Der Beweis von (1.4) ist konstruktiv, wenn man den lokalen Fluss  $\Phi$  explizit kennt.

Folgendes Resultat zur "Zeitskalierung" ist gelegentlich nützlich:

**(1.5) Lemma.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  mit lokalem Fluss  $\Phi$ . Weiter sei  $U^* \subset U$  nichtleer und offen,  $\mu : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion und  $f^*(x) := \mu(x)f(x)$ . Mit  $\Phi^*$  werde der lokale Fluss von  $\dot{x} = f^*(x)$  auf  $U^*$  bezeichnet.

Schließlich sei  $y \in U^*$  und  $z(t) := \Phi(t, y)$  mit maximalem Existenzintervall  $I = I_{\max}(y)$  sowie  $z^*(t) := \Phi^*(t, y)$  mit maximalem Existenzintervall  $I^*$  auf  $U^*$ . Dann gilt:

a) In einer Umgebung von  $t = 0$  gilt  $z^*(t) = z(\tau(t))$ , wobei  $\tau$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\tau}(t) = \mu(z(\tau(t))), \quad \tau(0) = 0$$

ist.

b) Ist  $\mu(y) \neq 0$ , so gibt es  $\rho > 0, \rho^* > 0$  derart, dass

$$\begin{aligned} \{z(t); |t| < \rho\} &\subset \{z^*(t); t \in I^*\}; \\ \{z^*(t); |t| < \rho^*\} &\subset \{z(t); t \in I\}. \end{aligned}$$

c) Hat  $\mu$  auf  $U^*$  keine Nullstelle, so haben  $\dot{x} = f(x)$  und  $\dot{x} = f^*(x)$  die gleichen Lösungsbahnen auf  $U^*$ .

**Beweis.** a) Es ist

$$\frac{d}{dt}(z(\tau(t))) = \dot{z}(\tau(t)) \cdot \dot{\tau}(t) = f(z(\tau(t))) \cdot \mu(z(\tau(t)))$$

und  $z(\tau(0)) = y$ . Die Behauptung folgt mit dem Eindeutigkeitsatz für  $\dot{x} = f^*(x)$ .

b) Es ist  $\tau$  stetig differenzierbar mit  $\tau'(0) = \mu(y) \neq 0$ . Also enthält der Wertebereich von  $\tau$  eine Nullumgebung von  $\mathbb{R}$ . Damit folgt die erste Inklusion. Die zweite ergibt sich mit  $f = \mu^{-1} \cdot f^*$ .

c) Es reicht zu zeigen, dass die Lösungsbahn durch  $y \in U^*$  für  $\dot{x} = f^*(x)$  in jener von  $\dot{x} = f(x)$  enthalten ist. Sei also  $T \in I^*$ . Gezeigt wird  $\Phi^*(T, y) = \Phi(S, y)$  für ein  $S \in I$ . Zu jedem  $t$  zwischen 0 und  $T$  existiert nach b) ein  $\rho_t^* > 0$  derart, dass

$$\{\Phi^*(s, \Phi^*(t, y)); |s| < \rho_t\} \subset \{\Phi(s, \Phi^*(t, y)); s \in I_{\max}(\Phi^*(t, y))\}.$$

Die Intervalle  $(t - \rho_t^*, t + \rho_t^*)$  überdecken das kompakte Intervall mit Endpunkten 0 und  $T$ , also gibt es endlich viele  $t_0, \dots, t_r$  derart, dass die zugehörigen Intervalle eine Überdeckung bilden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei weiter die Folge  $t_0, \dots, t_r$  strikt monoton mit  $t_0 = 0$  und  $t_r = T$ . Durch evtl. Hinzunahme weiterer  $t_i$  können wir auch annehmen, dass  $t_{i+1} \in (t_i - \rho_{t_i}^*, t_i + \rho_{t_i}^*)$  für alle  $i$  gilt.

Nun gibt es nach Konstruktion zu jedem  $j \in \{1, \dots, r\}$  ein  $s_j$  derart, dass

$$\Phi^*(t_j, y) = \Phi(s_j, \Phi^*(t_{j-1}, y)),$$

insbesondere

$$\Phi^*(t_1, y) = \Phi(s_1, y)$$

und

$$\Phi^*(t_2, y) = \Phi(s_2, \Phi^*(t_1, y)) = \Phi(s_2, \Phi(s_1, y)) = \Phi(s_1 + s_2, y).$$

Mit Induktion folgt

$$\Phi^*(t_j, y) = \Phi(s_1 + \dots + s_j, y)$$

für alle  $j \leq r$  und die Behauptung. □

**(1.6) Beispiel.** Das Volterra - Lotka - Modell

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(cx_1 - d)\end{aligned}\quad (a, b, c, d > 0 \text{ Konstanten})$$

auf dem (offenen) positiven Quadranten  $U$  lässt sich wie folgt behandeln:

Auf  $U^* := \{x \in U; 0 < x_1 < \frac{d}{c}\}$  ist  $\mu(x) := (x_2(cx_1 - d))^{-1}$  definiert und  $\neq 0$ , also hat die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1(a - bx_2)}{x_2(cx_1 - d)} \\ \dot{x}_2 &= 1\end{aligned}$$

dort dieselben Bahnen. Insbesondere  $x_2 = x_2(0) + t$  und mit der Kettenregel gilt

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(a - bx_2)}{x_2(cx_1 - d)}.$$

Dies ist eine trennbare Gleichung für  $x_1$  als Funktion von  $x_2$ , woraus sich das Verhalten der Lösungsbahnen erschließen lässt.

In vielen Situationen ist es sinnvoll und interessant, die Änderung gewisser skalarwertiger Funktionen "längs Lösungen der Differentialgleichung" zu betrachten.

**(1.7) Definition.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , weiter  $U^* \subset U$  nichtleer und offen, und  $\varphi : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion.

- Die Funktion  $L_f(\varphi) : U^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto D\varphi(x)f(x)$  heißt die *LIE-Ableitung* (oder *orbitale Ableitung*) von  $\varphi$  bezüglich  $f$ .
- Ist  $\varphi$  nicht konstant und gibt es ein stetiges  $\mu : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $L_f(\varphi) = \mu \cdot \varphi$ , so heißt  $\varphi$  *Semiinvariante* von  $f$ . Im Fall  $\mu = 0$  nennt man  $\varphi$  *erstes Integral* (oder *Invariante*) von  $f$ .
- Falls  $L_f(\varphi)(x) \leq 0$  für alle  $x \in U^*$ , so heißt  $\varphi$  *LJAPUNOV-Funktion* von  $f$  auf  $U^*$ .

**(1.8) Bemerkungen.** a) Ist  $z(t)$  eine Lösung von  $\dot{x} = f(x)$  in  $U^*$ , so ist

$$\frac{d}{dt} \varphi(z(t)) = D\varphi(z(t))\dot{z}(t) = D\varphi(z(t))f(z(t)) = L_f(\varphi)(z(t)).$$

In diesem Sinne beschreibt die LIE-Ableitung also die Veränderung von  $\varphi$  längs Lösungen der Gleichung.

- Ist  $\varphi$  ein erstes Integral von  $f$ , so gilt demnach  $\frac{d}{dt} \varphi(z(t)) = 0$  für jede Lösung auf  $U^*$ . Die Lösungen sind also in den Niveaumengen  $\varphi^{-1}(\{c\})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , "eingesperrt".
- Ist  $\varphi$  eine LJAPUNOV-Funktion von  $f$ , so gilt  $\frac{d}{dt} \varphi(z(t)) \leq 0$  für jede Lösung auf  $U^*$ ; insbesondere  $\varphi(z(t)) \leq \varphi(z(0))$  für alle  $t \in I_{\max}(z_0)$ ,  $t \geq 0$ . Die Lösungen sind für  $t \geq 0$  also in Subniveaumengen

$$\{x \in U^*; \varphi(x) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

"eingesperrt", so lange sie in  $U^*$  bleiben.

(1.9) Beispiele. a) Ungedämpftes Fadenpendel:  $\dot{x} = f(x)$  auf  $\mathbb{R}^2$ , in Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 && \text{(aus } \ddot{x} = -\sin x) \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1\end{aligned}$$

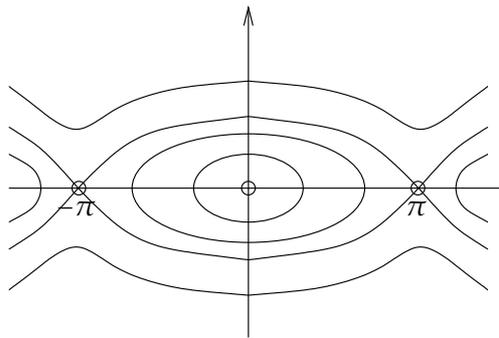
Für  $\varphi(x) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$ ,  $D\varphi(x) = (\sin x_1, 2x_2)$  ist

$$D\varphi(x)f(x) = x_2 \cdot \sin x_1 + x_2 \cdot (-\sin x_1) = 0,$$

also  $\varphi$  erstes Integral.

Die Niveaumengen von  $\varphi$  erhält man aus  $\frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1 = c = \text{const.}$ , also

$$x_2^2 = 2c + 2 \cos x_1, \quad x_2 = \pm \sqrt{2c + 2 \cos x_1}.$$



Einige Niveaulinien (zusammen mit einigen der stationären Punkte  $(\frac{k\pi}{0})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) sind skizziert.

b) Fadenpendel mit geschwindigkeitsabhängiger Reibung:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 && \text{(dabei } \alpha > 0 \text{ Konstante)} \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1\end{aligned}$$

Hier ergibt sich mit  $\varphi(x) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$  und Rechnung analog zu oben:

$$L_f(\varphi)(x) = -\alpha x_2^2 \leq 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Also ist  $\varphi$  eine LJAPUNOV-Funktion.

Für Physiker hat  $\varphi$  in diesen Beispielen eine Bedeutung:  $\varphi$  gibt die Gesamtenergie des Systems an, die im ersten Beispiel erhalten bleibt und im zweiten abnimmt (Reibungsverlust). Das Beispiel ist auch ein Indikator, wie erste Integrale oder LJAPUNOV-Funktionen - falls es solche gibt - vielleicht zu finden sind.

## §2. Invariante Mengen

Die Suche nach, oder die Betrachtung von, invarianten Mengen ist eine weitere Standard-Technik bei der Untersuchung autonomer Gleichungen.

**(2.1) Definition.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , und  $Y$  sei Teilmenge von  $U$ . Dann heißt  $Y$  *positiv invariant* [ resp. *negativ invariant* ] für  $\dot{x} = f(x)$ , wenn für jedes  $y \in Y$  und alle  $t \in I_{\max}(y)$  mit  $t \geq 0$  [ resp.  $t \leq 0$  ] gilt  $\Phi(t, y) \in Y$ .  
Ist  $Y$  sowohl positiv als auch negativ invariant, so heißt  $Y$  *invariant*.

Folgende Aussagen zu invarianten und positiv invarianten Mengen sind schon aus (1.8) bekannt. Wir formulieren sie – der Deutlichkeit halber – nochmal.

**(2.2) Satz.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a) Ist  $\varphi$  erstes Integral der Gleichung, so ist jede Niveaumenge  $\varphi^{-1}(\{c\})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , eine invariante Menge.  
b) Ist  $\varphi$  eine LJAPUNOV-Funktion der Gleichung, so ist jede der Subniveaumengen

$$\{x \in U; \varphi(x) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

und  $\{x \in U; \varphi(x) < c\}, \quad c \in \mathbb{R}$

*positiv invariant.* □

**(2.3) Bemerkungen.** a) Weil  $\Phi(-t, y)$  die Lösung von  $\dot{x} = -f(x)$ ,  $x(0) = y$  ist (siehe etwa Lemma (1.5) für  $\mu = -1$ ), sind negativ invariante Mengen von  $\dot{x} = f(x)$  positiv invariant für  $\dot{x} = -f(x)$ , und umgekehrt. Deshalb lassen sich Aussagen über negativ invariante Mengen auf solche über positiv invariante Mengen zurückführen. Im Folgenden geht es deshalb vor allem um positiv invariante Mengen.

- b) Positiv invariante Mengen sind nach Definition und wegen der Halbgruppeneigenschaft (siehe Kapitel I, Satz (5.7)) genau die Vereinigungen positiver Halbtrajektorien  $\Gamma^+(y) = \{\Phi(t, y); t \in I_{\max}(y), t \geq 0\}$ . Weiterhin sind invariante Mengen genau die Vereinigungen von Trajektorien  $\Gamma(y) = \{\Phi(t, y); t \in I_{\max}(y)\}$ .  
c) Vereinigungen und Durchschnitte positiv invarianter Mengen sind positiv invariant. Das Komplement einer positiv invarianten Menge ist negativ invariant, und vice versa. Vereinigungen, Durchschnitte und Komplemente invarianter Mengen sind invariant. All diese Eigenschaften folgen in simpler Weise aus b), da verschiedene Trajektorien disjunkt sind.

Zu topologischen Eigenschaften (positiv) invarianter Mengen gilt folgende Aussage. Hier zeigt sich der Nutzen von Abhängigkeitssätzen.

Wir erinnern an die Begriffe Abschluss  $\bar{Y}$ , Inneres (oder offener Kern)  $\overset{\circ}{Y}$  und Rand  $\partial Y$  einer Teilmenge  $Y$  des  $\mathbb{R}^n$ . (In diesem Skript sind Abschluss, Inneres, Rand stets auf die Normtopologie des  $\mathbb{R}^n$  bezogen. Einige andere Literaturquellen beziehen sich – explizit oder implizit – auf die Relativtopologie bezüglich  $U$ . Deshalb ist beim Vergleich Vorsicht geboten.)

**(2.4) Lemma.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  und  $Y$  sei Teilmenge von  $U$ .

a) Ist  $Y$  positiv invariant, so sind auch  $\bar{Y} \cap U$  sowie  $\overset{\circ}{Y}$  positiv invariant.

b) Ist  $Y$  invariant, so sind auch  $\bar{Y} \cap U$ ,  $\overset{\circ}{Y}$  sowie  $\partial Y \cap U$  invariant.

**Beweis.** a) Es sei  $z \in \bar{Y} \cap U$ , also  $z \in U$  und es gibt eine Folge  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $Y$  so, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = z$ .

Sei weiter  $t \in I_{\max}(z)$ ,  $t \geq 0$  fest. Nach Kapitel III, Satz (1.5) gibt es dann eine Umgebung  $V$  von  $z$  in  $U$  so, dass  $\Phi(t, y)$  für alle  $y \in V$  existiert.

Also existiert  $\Phi(t, y_k)$  für fast alle  $k$  und Kapitel III, Satz (2.1) zeigt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, y_k) = \Phi(t, z)$ .

Aus  $\Phi(t, y_k) \in Y$  folgt somit  $\Phi(t, z) \in \bar{Y}$ . Zum Nachweis der positiven Invarianz von  $\overset{\circ}{Y}$  beachte die negative Invarianz von  $U \setminus Y$ , also auch von  $\overline{U \setminus Y} \cap U$ , sowie  $\overset{\circ}{Y} \cap U = \overset{\circ}{Y}$  wegen der Offenheit von  $U$ .

b) folgt aus (a) und (2.3). □

Es fehlen weitere handhabbare Kriterien für Invarianz oder positive Invarianz. Einige werden jetzt geliefert:

**(2.5) Satz.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , weiter seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_r : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, und  $Y := \{x \in U; \varphi_1(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0\}$ . Falls es stetige Funktionen  $\mu_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$L_f(\varphi_i) = \sum_{j=1}^r \mu_{ij} \cdot \varphi_j \quad (1 \leq i \leq r),$$

dann ist  $Y$  invariant. Ist insbesondere  $\varphi$  eine Semiinvariante von  $f$  auf  $U$ , so ist die Nullstellenmenge von  $\varphi$  invariant.

**Beweis.** Sei  $Y \neq \emptyset$ , und  $y \in Y$ . Kürze ab  $z(t) := \Phi(t, y)$ . Dann gilt nach Voraussetzung und (1.8)

$$\frac{d}{dt} \varphi_i(z(t)) = L_f(\varphi_i)(z(t)) = \sum_{j=1}^r \mu_{ij}(z(t)) \varphi_j(z(t)), \quad 1 \leq i \leq r,$$

also ist  $(\varphi_1(z(t)), \dots, \varphi_r(z(t)))$  eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^r \mu_{ij}(z(t)) w_j \quad (1 \leq i \leq r)$$

zum Anfangswert 0 bei  $t = 0$ , und somit identisch Null. □

**(2.6) Beispiele.** a) Die Chemostat - Gleichung (in einer Umgebung des positiven Quadranten  $P \subset \mathbb{R}^2$ )

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c + x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c + x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x), \quad \text{vgl. Beispiel (1.3) a)}$$



besitzt die invariante Menge  $Y = \{x; x_2 = 0\}$ , denn für  $\varphi(x) = x_2$  ist

$$L_f(\varphi)(x) = (0, 1) \cdot f(x) = \left( \frac{bx_1}{c+x_1} - \delta \right) \cdot x_2 = \mu(x) \cdot \varphi(x)$$

mit  $\mu(x) = \frac{bx_1}{c+x_1} - \delta$ .

b) Die EULER - Gleichung in  $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 x_2 x_3$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_2 x_3 x_1$$

$$\dot{x}_3 = \alpha_3 x_1 x_2$$

(wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  Konstanten) besitzt z. B. die invariante Menge  $Y = \{x; x_1 = x_2 = 0\}$ . Denn für  $\varphi_1(x) = x_1, \varphi_2(x) = x_2$  ist

$$L_f(\varphi_1)(x) = \underbrace{\alpha_1 x_3}_{=: \mu_{12}(x)} \cdot x_2 = 0 \cdot \varphi_1(x) + \mu_{12}(x) \varphi_2(x)$$

und  $L_f(\varphi_2)(x) = \mu_{21}(x) \cdot \varphi_1(x)$ , wobei  $\mu_{21}(x) = \alpha_2 x_3$ .

Aus (2.2) erhält man weiterhin invariante Mengen

$$\{x; \alpha_2 x_1^2 - \alpha_1 x_2^2 = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

da mit  $\psi(x) := \alpha_2 x_1^2 - \alpha_1 x_2^2$  ein erstes Integral der Gleichung gegeben ist.

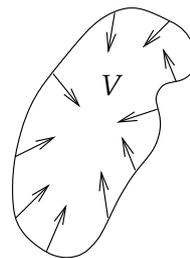
c) Für

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1^2 - 2x_2 & (\text{kurz } \dot{x} &= f(x)) \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 x_2 - 3x_1^2 \end{aligned}$$

ist  $Y = \{x; x_1^3 - x_2^2 = 0\}$  invariant, denn mit  $\varphi(x) = x_1^3 - x_2^2$  ist

$$L_f(\varphi)(x) = (3x_1^2, -2x_2) \begin{pmatrix} 2x_1^2 - 2x_2 \\ 3x_1 x_2 - 3x_1^2 \end{pmatrix} = 6x_1^4 - 6x_1 x_2^2 = 6x_1 \cdot (x_1^3 - x_2^2).$$

Nun zu Kriterien für positive Invarianz, in Verallgemeinerung von (2.2) b). Ist  $V \subset U$  eine offene positiv invariante Menge, so sollte anschaulich "am Rand von  $V$  das Vektorfeld ins Innere von  $V$  zeigen" (oder wenigstens nicht nach außen).



Das Folgende ist eine präzise Fassung dieses Kriteriums (welche zeigt, dass es auch hinreichend ist), die allerdings relativ starke Voraussetzungen an den Rand von  $V$  stellt.

**(2.7) Satz.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^n$ , und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine  $C^2$ -Funktion derart, dass  $U^- := \{x \in U; \varphi(x) < 0\}$  nicht leer ist. Es sei  $V$  eine Zusammenhangskomponente von  $U^-$ . Wenn die Bedingungen

$$D\varphi(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad L_f(\varphi)(x) \leq 0 \quad (\text{also } \langle \text{grad } \varphi(x), f(x) \rangle \leq 0)$$

für alle  $x \in \partial V \cap U$  erfüllt sind, dann sind  $\bar{V} \cap U$  und  $V$  positiv invariant.

*Anmerkung:* Aus der Analysis ist bekannt, dass  $\partial V \cap U$  dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$  ist.

**Beweis.** Weil  $\varphi$  stetig ist, gilt  $\varphi(x) = 0$  auf  $\partial V \cap U$ .

- (i) Zunächst sei  $L_f(\varphi)(x) < 0$  für alle  $x \in \partial V \cap U$  vorausgesetzt. Wäre  $V$  nicht positiv invariant, so gäbe es ein  $y \in V$  derart, dass die Lösung  $z(t)$  von  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = y$ , für ein  $t^* > 0$  die Bedingung  $z(t^*) \notin V$  erfüllt. Dann gibt es auch ein  $\tau > 0$  so, dass  $z(\tau) \in \partial V$  und  $z(t) \in V$  für  $0 \leq t < \tau$ . Also ist  $\varphi(z(\tau)) = 0$  und  $\varphi(z(\tau - h)) < 0$  für alle hinreichend kleinen  $h > 0$ .

Es folgt  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(z(\tau - h)) - \varphi(z(\tau))}{-h} \geq 0$ , also  $L_f(\varphi)(z(\tau)) \geq 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

- (ii) Nun gelte die schwächere Voraussetzung  $L_f(\varphi)(x) \leq 0$  für alle  $x \in \partial V \cap U$ . Für  $\varrho > 0$  setze  $f_\varrho(x) := f(x) - \varrho \cdot \text{grad } \varphi(x)$ . Dann ist

$$L_{f_\varrho}(\varphi)(x) = L_f(\varphi)(x) - \varrho \cdot \langle \text{grad } \varphi(x), \text{grad } \varphi(x) \rangle < 0$$

für alle  $x \in \partial V \cap U$ , also ist  $\bar{V} \cap U$  positiv invariant für alle  $f_\varrho$  mit  $\varrho > 0$ .

Für  $y \in \bar{V} \cap U$  und  $t > 0$  nenne  $\Phi_\varrho(t, y)$  die Lösung von  $\dot{x} = f_\varrho(x)$ ,  $x(0) = y$ . Für ein festes  $t > 0$  ist dann  $\varrho \rightarrow \Phi_\varrho(t, y)$  stetig (vgl. Kapitel III, Korollar (2.7)) und es ist  $\Phi_\varrho(t, y) \in \bar{V} \cap U$  für alle (hinreichend kleinen)  $\varrho > 0$ .

Also  $\Phi(t, y) = \Phi_0(t, y) \in \bar{V}$ , und  $\bar{V} \cap U$  ist positiv invariant.  $\square$

**(2.8) Bemerkungen.** a) Die Bedingung ist auch notwendig: Falls  $L_f(\varphi)(y) > 0$  für ein  $y \in \partial V \cap U$ , so

$$\varphi(\Phi(t, y)) = \varphi(y) + t L_f(\varphi)(y) + \dots = t L_f(\varphi)(y) + \dots > 0$$

für kleine  $t > 0$ , also  $\Phi(t, y) \notin \bar{V}$ .

Aus demselben Grund gilt: Verlässt eine Trajektorie  $\{\Phi(t, w); t \in I_{\max}(w)\}$  für positive Zeiten die Menge  $V$  durch  $y \in \partial V \cap U$  (d. h. es gibt ein  $\tau > 0$  so, dass  $\Phi(t, w) \in V$  für  $0 \leq t < \tau$ ,  $\Phi(\tau, w) \in \partial V$  und  $\Phi(\tau + \varepsilon, w) \notin V$  für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$ ), dann ist  $L_f(\varphi)(y) \geq 0$ .

- b) Eine Variante des Kriteriums aus (2.7) geht von der Menge

$$U_c^- := \{x \in U; \varphi(x) < c\} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ Konstante})$$

und der (scheinbar allgemeineren) Bedingung

$$D\varphi(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad L_f(\varphi)(x) \leq 0$$

für alle  $x \in \partial V \cap U$  aus, wobei  $V$  eine Zusammenhangskomponente von  $U_c^-$  ist. Der Beweis wird mit  $\psi(x) := \varphi(x) - c$  auf den Fall  $c = 0$  zurückgeführt.

- (2.9) Beispiele.** a) Fadenpendel mit geschwindigkeitsabhängiger Reibung (vgl. Beispiel (1.9) b)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \sin x_1$$

Für  $\varphi(x) := \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$  ist  $L_f(\varphi)(x) = -\alpha x_2^2 \leq 0$ .  
Nach (2.2) b) ist also jede Subniveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^2; \varphi(x) < c\}$$

positiv invariant, und auch jede Zusammenhangskomponente einer solchen Subniveaumenge.

b)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3^3 \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x) \text{ auf } \mathbb{R}^3)$$

Für hinreichend große  $\alpha$  ist die Kugel  $K_\alpha = \{x; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \alpha\}$  positiv invariant: Mit  $\psi(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  ist zunächst

$$L_f(\psi)(x) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$$

Nun gibt es positive Konstanten  $\sigma_1, \sigma_2$  so, dass

$$\begin{aligned} 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) &\leq \sigma_1 \cdot \psi(x) \quad \text{und} \\ 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) &\geq \sigma_2 \cdot \psi(x)^2, \quad \text{für alle } x. \end{aligned}$$

Also  $L_f(\psi)(x) \leq \psi(x)(\sigma_1 - \sigma_2\psi(x))$ , und für  $\psi(x) \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  ist  $L_f(\psi)(x) \leq 0$ .

Sei nun  $\alpha \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  und  $\varphi(x) := \psi(x) - \alpha$ . Dann ist  $\partial K_\alpha$  gerade die Nullstellenmenge von  $\varphi$ ,  $\varphi(x) < 0$  für  $x \in K_\alpha$ , und für  $x \in \partial K_\alpha$  gilt  $L_f(\varphi)(x) = L_f(\psi)(x) \leq 0$ .

Wegen der Kompaktheit von  $\bar{K}_\alpha$  und Kapitel I, Satz (5.4) existiert dann jede Lösung für  $0 \leq t < \infty$ .

Ein anderes häufig gebrauchtes Kriterium ist das folgende. Hier sind (2.2) und (2.7) nicht direkt anwendbar.

**(2.10) Satz.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  und

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$$

sei der positive Orthant. Dann ist  $U \cap P$  positiv invariant für  $\dot{x} = f(x)$  genau dann, wenn gilt:

Für  $i = 1, \dots, n$  folgt aus  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U \cap P$  stets, dass  $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$ .

**Beweis.** Analog zu (2.8) zeigt man, dass die Bedingung notwendig ist. Zum Nachweis, dass sie auch hinreichend ist, sei  $\rho \geq 0$  und

$$g(\rho, x) := f(x) + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit  $g_i(\rho, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) > 0$  für alle  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U \cap P, \rho > 0$ .

Sei  $\rho > 0$ . Gäbe es eine Lösung  $v(t)$  von  $\dot{x} = g(\rho, x)$  mit  $v(0) \in U \cap P, v(t^*) \notin U \cap P$  für ein  $t^* > 0$ , so gäbe es ein  $\tau > 0$  und ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so dass

$$v(t) \in U \cap P \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad v_i(\tau) = 0.$$

Wie im Beweis von (2.8) schließt man

$$\dot{v}_i(\tau) \leq 0,$$

im Widerspruch zu

$$\dot{v}_i(\tau) = g_i(\rho, v_1(\tau), \dots, v_{i-1}(\tau), 0, v_{i+1}(\tau), \dots, v_n(\tau)) > 0.$$

Also ist  $U \cap P$  positiv invariant für  $\dot{x} = g(\rho, x), \rho > 0$ . Mit stetiger Abhängigkeit schließt man die positive Invarianz nun auch für  $\rho = 0$ , also für  $\dot{x} = f(x)$ .  $\square$

**(2.11) Beispiel.** Für die Chemostat - Gleichung (siehe (1.3) und (2.6)) gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x))$$

$$f_1(0, x_2) = r > 0; \quad f_2(x_1, 0) = 0;$$

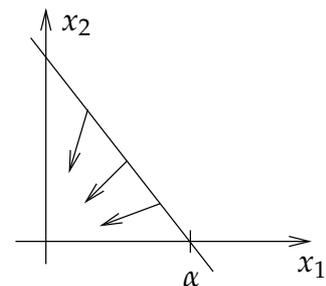
also ist der positive Quadrant  $P$  positiv invariant. (Dies ist auch gut so, da die Gleichung Massen oder Konzentrationen beschreibt.)

In (1.3) wurde für  $\varphi(x) = x_1 + \frac{a}{b} x_2$  außerdem  $L_f(\varphi)(x) = r - \delta\varphi(x)$  berechnet, also ist für jedes  $\alpha \geq \frac{r}{\delta}$  die Menge

$\{x; \varphi(x) \leq \alpha\}$  positiv invariant. Mit (2.3) ist also jede kompakte Menge

$$\Delta_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \varphi(x) \leq \alpha\}$$

positiv invariant.



Insbesondere existiert nach Kapitel I, Satz (5.4) also jede Lösung  $\Phi(t, y), y \in P$ , für  $0 \leq t < \infty$ .

**(2.12) Bemerkung.** Das Kriterium für positive Invarianz, das in (2.7) bewiesen wurde, ist relativ schwach. So gilt (2.7) etwa auch dann, wenn  $Z := \{x \in \partial V; D\varphi(x) = 0\}$  eine Vereinigung endlich vieler Untermannigfaltigkeiten von Dimension  $< n - 1$  ist. Der Rand von  $Z$  darf also "Ecken und Kanten" haben, so lange es nicht zu viele sind. Die Beweise hierfür werden aber recht unangenehm.

### §3. Lineare Kompartimentsysteme

Für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n$  mit  $i \neq j$  seien gegeben nichtnegative reelle Zahlen  $\gamma_i$ ,  $\vartheta_{ij}$  und  $\beta_i$ . Die autonome lineare Differentialgleichung

$$(K) \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -(\sum \vartheta_{i1} + \gamma_1) & \vartheta_{12} & \cdots & \vartheta_{1n} \\ \vartheta_{21} & -(\sum \vartheta_{i2} + \gamma_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vartheta_{n-1,n} \\ \vartheta_{n1} & \vartheta_{n2} & \cdots & -(\sum \vartheta_{in} + \gamma_n) \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

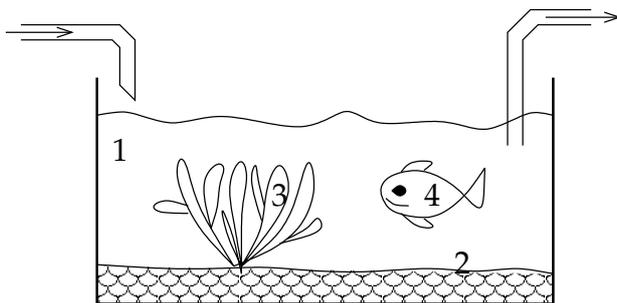
(mit der charakteristischen Eigenschaft, dass die Matrix außerhalb der Diagonale nur Einträge  $\geq 0$  hat, jede Spaltensumme aber  $\leq 0$  ist) heißt ein *lineares Kompartimentsystem*; die zugehörige Matrix nennt man auch eine *Kompartimentmatrix*. Kürzt man dies mit  $\dot{x} = f(x)$  ab, so gilt offenbar

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = \vartheta_{i1}x_1 + \cdots + \vartheta_{i,i-1}x_{i-1} + \vartheta_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + \vartheta_{in}x_n + \beta_i,$$

also ist das Kriterium von Satz (2.10) offenbar erfüllt. Der positive Orthant  $P$  ist somit für solche Systeme positiv invariant.

Lineare Kompartimentsysteme werden z. B. in Physiologie und Ökologie verwendet, um den Verbleib gewisser Stoffe (Medikamente, Chemikalien ...) in einem System (Körper, Ökosystem ...) zu modellieren. Dabei stellt man sich das System in  $n$  "Reservoirs" (Kompartimente) eingeteilt vor, und  $x_i$  gibt dann etwa die Masse oder Stoffmenge des Stoffes in Reservoir # $i$  an. Die Gleichung beschreibt dann Transport zwischen den Reservoirs (dafür sind die  $\vartheta_{ij}$  zuständig); Abbau/Verlust in den einzelnen Reservoirs (dafür stehen die  $\gamma_i$ ) und Zufluss von außen in die Reservoirs (dafür stehen die  $\beta_i$ ).

**(3.1) Beispiel.** In der Ökotoxikologie wird oft der Verbleib einer Chemikalie (etwa Östrogen) in einem Ökosystem mittels linearer Kompartimentsysteme modelliert. Für einen Teich (mit Zu- und Abfluss) betrachtet man etwa die *Kompartimente* 1 = Wasser, 2 = Sediment, 3 = pflanzliche Biomasse, sowie 4 = tierische Biomasse. Mit  $x_1, \dots, x_4$  seien (in der selben Reihenfolge) die Massen der Chemikalie in den Kompartimenten bezeichnet.



Das lineare Kompartimentsystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -(\vartheta_{21} + \vartheta_{31} + \vartheta_{41} + \gamma_1) & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} & \vartheta_{14} \\ \vartheta_{21} & -(\vartheta_{12} + \vartheta_{32}) & \vartheta_{23} & 0 \\ \vartheta_{31} & \vartheta_{32} & -(\vartheta_{13} + \vartheta_{23}) & 0 \\ \vartheta_{41} & 0 & 0 & -\vartheta_{14} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(wobei  $\gamma_1 > 0$  und die angegebenen  $\vartheta_{ij} > 0$  angenommen werden, und  $\beta_1 \geq 0$ ) beschreibt nun die zeitliche Entwicklung der Konzentrationen. Die beiden Nullen je in Zeile 4 und Spalte 4 der Matrix lassen sich so interpretieren, dass zwischen Sediment und Tieren bzw. Pflanzen und Tieren kein direkter Transport der Chemikalie stattfindet; hingegen sehr wohl zwischen allen anderen Kompartimenten. Mit  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  wird Zufluss bzw. Abfluss der Chemikalie beschrieben (vgl. Kapitel I, §1 A); ein anderweitiger Abbau findet nicht statt. Blickt man auf Kapitel I, §1 A zurück, so zeigt sich, dass für die Brauchbarkeit des Modells gewisse Voraussetzungen erfüllt sein müssen (etwa gleichmäßige Verteilung der Chemikalie in jedem Kompartiment); in realen Systemen ist dies nicht unbedingt der Fall. Andererseits ist es praktisch kaum möglich, ein Ökosystem "exakt" zu modellieren. Die Bedeutung der Modellierung mit linearen Kompartimentsystemen liegt gerade in ihrer Einfachheit, die angesichts der schlechten Datenlage einen akzeptablen Kompromiss darstellt. Für grobe Schätzungen sind solche Modelle durchaus nützlich.

Ist  $A$  eine Kompartimentmatrix, so ist offenbar für hinreichend großes  $\sigma > 0$  die Matrix  $B := A + \sigma E$  eine *nichtnegative Matrix*, d. h. all ihre Einträge sind  $\geq 0$ .

**(3.2) Definition.** Falls es eine Permutationsmatrix  $T$  gibt, so dass für die Kompartimentmatrix  $A$  [bzw. die nichtnegative Matrix  $B$ ] gilt, dass

$$T^{-1}AT = \left( \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

obere Block-Dreiecksgestalt hat [bzw. für  $T^{-1}BT$  die analoge Eigenschaft gilt], so nennt man  $A$  [bzw.  $B$ ] *reduzibel*; andernfalls *irreduzibel*.

Anders gesagt: Lässt sich durch geeignetes Umnúmerieren der Variablen erreichen, dass das System in oberer Block-Dreiecksgestalt vorliegt, dann heißt die Matrix *reduzibel*, andernfalls *irreduzibel*. Die Matrix in Beispiel (3.1) ist *irreduzibel*.

**(3.3) Bemerkungen.** a) *Reduzibilität* einer Kompartimentmatrix heißt für das Modell: Es gibt eine Zerlegung des Systems in zwei disjunkte Teilsysteme von Kompartimenten, so dass kein Transport vom ersten Teilsystem ins zweite stattfindet.

b) Die Diagonalblöcke einer *reduziblen* Kompartimentmatrix sind wieder Kompartimentmatrizen (Bitte verifizieren!). Deshalb lässt sich jede *reduzible* Kompartimentmatrix bis auf Permutationen darstellen in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & & & & \\ & \boxed{*} & & & * \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

mit *irreduziblen* Blöcken in der Diagonale.

Wir wollen Aussagen über das Verhalten der Lösungen von  $(K)$  gewinnen. Ein Schritt hierzu ist die folgende Aussage, die auch für sich von Interesse ist.

**(3.4) Satz.** (Satz von PERRON und FROBENIUS; schwache Form).

Es sei  $A$  eine Kompartimentmatrix. Dann besitzt  $A$  einen nichtnegativen Eigenvektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ wobei alle } v_i \geq 0 \text{ (kurz: } v \geq 0)$$

zu einem reellen Eigenwert. Ist  $A$  irreduzibel, so gilt sogar  $v_i > 0$  für  $1 \leq i \leq n$ .

**Beweis.** Wähle  $\sigma > 0$  so, dass  $B = A + \sigma E$  nichtnegativ ist.

Durch  $x \mapsto Bx$  wird der positive Orthant  $P$  in sich abgebildet. Gibt es ein  $v \geq 0$ ,  $v \neq 0$ , mit  $Bv = 0$ , so ist die erste Behauptung klar. Andernfalls betrachte mit der 1-Norm ( $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ ) das Einheits-Simplex

$$S = \{x \in P; \|x\|_1 = 1\}.$$

Durch  $S \rightarrow S$ ,  $x \mapsto \frac{1}{\|Bx\|_1} \cdot Bx$  ist dann eine stetige Abbildung der kompakten und konvexen Menge  $S$  in sich gegeben. Nach dem BROUWERSchen Fixpunktsatz gibt es einen Fixpunkt für diese Abbildung; also ein  $v \in S$  mit  $v = \frac{1}{\|Bv\|_1} Bv$ . Dies zeigt die erste Behauptung. Für die zweite Behauptung zeigen wir: Sind nicht alle Einträge  $v_i > 0$ , so ist  $B$  (also  $A$ ) reduzibel. Wir dürfen nach evtl. Umnummerieren annehmen, dass

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } v_1 > 0, \dots, v_r > 0.$$

Dann ist  $Bv = \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , mit der Partitionierung  $B = \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right)$  also  $B_{21} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} = 0$ . Nun

hat  $B_{21}$  lauter Einträge  $\geq 0$ , und mit  $v_1 > 0, \dots, v_r > 0$  folgt, dass jeder dieser Einträge gleich Null sein muss. Also  $B_{21} = 0$ ;  $B$  ist reduzibel.  $\square$

Nun zum Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung im positiven Orthanten:

**(3.5) Satz.** Gegeben sei das System (K), abgekürzt als

$$\dot{x} = Ax + b$$

auf dem positiven Orthanten  $P$ . Dann gilt:

- Die Matrix  $A$  besitzt nur Eigenwerte mit Realteil  $\leq 0$ .
- Ist  $A$  invertierbar, so konvergiert jede Lösung der Gleichung gegen  $-A^{-1}b \in P$ . Es stellt sich also im Grenzwert ein Gleichgewicht ein.

**Beweis.** a) Für  $\delta > 0$  setze  $\psi_\delta(x) := x_1 + \dots + x_n - \delta$  und betrachte zunächst  $\dot{x} = Ax$ . Es ist  $P$  positiv invariant für diese Gleichung und

$$\begin{aligned} L_A(\psi_\delta)(x) &= (1, \dots, 1) \cdot Ax \\ &= -\gamma_1 x_1 - \dots - \gamma_n x_n \leq 0 \end{aligned}$$

für alle  $x \in P$ . Jede kompakte Menge  $Q_\delta := \{x \in P; \psi_\delta(x) \leq 0\}$  ist also nach Satz (2.2) positiv invariant und deshalb ist jede Lösung mit Anfangswert in  $P$  für  $t > 0$  beschränkt. Aus Kapitel II, Satz (2.10) folgt die Behauptung.

Für Teil b) zeigen wir zuerst, dass  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  für jeden Eigenwert von  $A$ . Dabei können wir wegen (3.3) annehmen, dass  $A$  irreduzibel ist (denn die Eigenwerte von  $A$  ergeben sich aus denen der Diagonalblöcke).

Nach a) müssen wir noch die Möglichkeit ausschließen, dass  $A$  rein imaginäre Eigenwerte  $i\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  besitzt. Nehmen wir an, es gibt einen solchen Eigenwert, mit Eigenvektor  $w$ . Dann ist bekanntlich  $\operatorname{Re}(e^{i\alpha t} \cdot w)$  eine reelle Lösung der homogenen Gleichung  $\dot{x} = Ax$ . Gemäß (3.4) existiert ein Eigenvektor  $v$  so, dass alle  $v_i > 0$ , mit einem reellen Eigenwert  $\mu < 0$ . Wählt man  $\|w\|$  hinreichend klein, so gilt  $v + \operatorname{Re}(w) \in P$ . Dank positiver Invarianz folgt

$$v \cdot e^{\mu t} + \operatorname{Re}(e^{i\alpha t} \cdot w) \in P$$

für alle  $t > 0$ . Wegen der Periodizität des zweiten Summanden und wegen  $e^{\mu t} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) folgt damit aber  $\operatorname{Re}(e^{i\alpha t} \cdot w) \in P$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ; insbesondere  $\int_0^{2\pi/\alpha} \operatorname{Re}(e^{i\alpha t} \cdot w) dt \in P \setminus \{0\}$  (alle Komponenten des Integranden sind  $\geq 0$ , und nicht alle  $\equiv 0$ ). Andererseits ist

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \operatorname{Re}(e^{i\alpha t} \cdot w) dt = \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha t} \cdot w \right) \right]_0^{2\pi/\alpha} = 0;$$

Widerspruch.

Aus Kapitel II, (2.10) und (2.12) folgt nun die Behauptung.  $\square$

Hier wurden mit Hilfsmitteln aus der Theorie der Differentialgleichungen Aussagen bewiesen, die auch für die Lineare Algebra interessant sind: Hat zum Beispiel  $A$  die Gestalt wie in (K) und ist invertierbar, so hat  $-A^{-1}$  nur Einträge  $\geq 0$ . (Versuchen Sie mal, dies direkt zu beweisen!)

## §4. Limesmengen

Existiert eine Lösung von  $\dot{x} = f(x)$  für alle  $t \in [0, \infty)$ , so interessiert man sich oft nicht so sehr für ihren Verlauf während einer endlichen Zeitspanne, sondern für das Langzeitverhalten der Lösung. Limesmengen charakterisieren dieses Langzeitverhalten. Salopp gesagt, liegen in der (Omega-)Limesmenge einer Lösung all die Punkte von  $U$ , denen die Lösung für beliebig große Zeiten beliebig nahe kommt.



**(4.1) Definition.** a) Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , und  $y \in U$  so, dass  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  existiert. Dann heißt  $z \in U$  ein  $\omega$ -Limespunkt oder *Omega-Limespunkt* von  $y$ , wenn es eine Folge  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $t_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gibt derart, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, y) = z$ . Die Menge aller  $\omega$ -Limespunkte heißt die  $\omega$ -Limesmenge von  $y$ ; Bezeichnung  $\omega(y)$ .

b) Es sei  $y \in U$  so, dass  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in (-\infty, 0]$  existiert. Dann heißt  $z \in U$  ein  $\alpha$ -Limespunkt oder *Alpha-Limespunkt* von  $y$ , wenn es eine Folge  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $t_k \rightarrow -\infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gibt derart, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, y) = z$ . Die Menge aller  $\alpha$ -Limespunkte heißt die  $\alpha$ -Limesmenge von  $y$ ; Bezeichnung  $\alpha(y)$ .

**(4.2) Lemma.** a) Es gilt

$$\omega(y) = \bigcap_{t^* \geq 0} \overline{\{\Phi(t, y); t \geq t^*\}} \cap U.$$

Insbesondere ist  $\omega(y) = \overline{\omega(y)} \cap U$ .

- b) Da  $\Phi(-t, y)$  die Lösung von  $\dot{x} = -f(x)$ ,  $x(0) = y$  ist, lassen sich alle Aussagen von  $\omega$ -Limesmengen auf  $\alpha$ -Limesmengen übertragen.
- c) Gilt  $y^* = \Phi(\tau, y)$  für ein  $\tau \in \mathbb{R}$ , so ist  $\omega(y) = \omega(y^*)$ . In diesem Sinn sind Limesmengen ganzen Lösungsbahnen zugeordnet.

**Beweis.** a) Bezeichne die Menge rechts mit  $Y$ . Ist  $z \in \omega(y)$  und gilt  $t_k \rightarrow \infty$  mit  $\Phi(t_k, y) \rightarrow z$  und ist  $t^* > 0$ , so existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $t_k \geq t^*$  für alle  $k \geq k_0$ . Also  $z \in Y$ . Ist umgekehrt  $w \in Y$ , so gibt es nach Definition zu jedem ganzen  $k \geq 0$  ein  $t_k \geq k$  mit der Eigenschaft

$$\|w - \Phi(t_k, y)\| < \frac{1}{k}.$$

Es folgt  $t_k \rightarrow \infty$  und  $\Phi(t_k, y) \rightarrow w$ . Die zweite Aussage folgt, weil jede Menge  $\{\Phi(t, y); t \geq t^*\}$  auf Grund ihrer Konstruktion abgeschlossen ist.

b) Siehe Lemma (1.5).

c) Gemäß der Halbgruppeneigenschaft aus Kapitel I, Satz (5.7) ist  $\Phi(t, y^*) = \Phi(t, \Phi(\tau, y)) = \Phi(t + \tau, y)$  für alle  $t \geq 0$ . Weil  $t_k \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $t_k + \tau \rightarrow \infty$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**(4.3) Beispiele.** a) Falls  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = z$ , so ist offenbar  $\omega(y) = \{z\}$ .

b) Für eindimensionale autonome Gleichungen - siehe Kapitel I, Satz (5.5) - sind Limesmengen entweder leer oder bestehen aus einem Punkt.

c) Für die lineare Gleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\Phi(t, y) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

wie man einfach bestätigt (oder ausrechnet).

Für  $t \rightarrow \infty$  konvergiert der erste Eintrag gegen 0 und es folgt

$$\omega(y) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}; z_1^2 + z_2^2 = 1 \right\}.$$

Zu wesentlichen Eigenschaften von Limesmengen:

**(4.4) Satz.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , und  $y \in U$  sei so, dass  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  existiert. Dann gilt:

- a)  $\omega(y)$  ist eine invariante Menge und  $\overline{\omega(y)} \cap U = \omega(y)$ . Mit  $z \in \omega(y)$  ist auch  $\alpha(z) \subset \omega(y)$  bzw.  $\omega(z) \subset \omega(y)$ , falls  $\Phi(t, z)$  für  $t \in (-\infty, 0]$  bzw.  $t \in [0, \infty)$  existiert.
- b) Gibt es ein Kompaktum  $K \subset U$  so, dass  $\Phi(t, y) \in K$  für alle hinreichend großen  $t$ , so ist  $\omega(y)$  nichtleer, kompakt und zusammenhängend.

**Beweis.** a) Zur Abgeschlossenheitsaussage siehe Lemma (4.2). Ist  $z \in \omega(y)$  mit  $z = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k, y)$  gemäß (4.1), und  $t^* \in \mathbb{R}$  so, dass  $\Phi(t^*, z)$  existiert, dann existiert auch  $\Phi(t^*, \Phi(t_k, y))$  für fast alle  $k$ ; siehe Kapitel III, Satz (1.5), und  $\Phi(t^*, \Phi(t_k, y)) = \Phi(t^* + t_k, y)$  konvergiert gegen  $\Phi(t^*, z)$ . Also  $\Phi(t^*, z) \in \omega(y)$ , und  $\omega(y)$  ist invariant. Die Behauptung  $\alpha(z) \subset \omega(y)$  bzw.  $\omega(z) \subset \omega(y)$  folgt nun aus Invarianz und aus  $\omega(y) = \overline{\omega(y)} \cap U$ .

b) Beachte, dass die Voraussetzung schon  $I_{\max}(y) = [0, \infty)$  garantiert. Nach BOLZANO-WEIERSTRASS ist  $\omega(y)$  nichtleer; wegen  $\omega(y) \subset K$  (da  $K$  alle seine Häufungspunkte enthält) und Abgeschlossenheit ist  $\omega(y)$  kompakt. Zum Zusammenhang: Wäre  $\omega(y)$  nicht zusammenhängend, so gäbe es disjunkte, abgeschlossene  $A_1, A_2 \subset \omega(y)$  mit  $\omega(y) = A_1 \cup A_2$ . Weil  $A_1$  und  $A_2$  dann auch kompakt sind, ist  $\varrho := \text{dist}(A_1, A_2) > 0$ . Zu jedem  $t^* > 0$  gibt es dann ein  $\tilde{t} > t^*$  so, dass  $\text{dist}(\Phi(\tilde{t}, y), A_i) \geq \varrho/3$  für  $i = 1, 2$ , denn es gibt ein  $\tau_1 \geq t^*$  mit  $\text{dist}(\Phi(\tau_1, y), A_1) < \varrho/3$ , weiter ein  $\tau_2 > \tau_1$  mit  $\text{dist}(\Phi(\tau_2, y), A_2) < \varrho/3$ , und für  $t \in (\tau_1, \tau_2)$  kann nicht immer eine dieser Ungleichungen gelten (Stetigkeit von  $x \mapsto \text{dist}(x, A_i)$  und Zusammenhang von  $(\tau_1, \tau_2)$ ).

Insbesondere: Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $t_k \geq k$  so, dass  $\text{dist}(\Phi(t_k, y), A_i) \geq \varrho/3$  für  $i = 1, 2$ . Die Folge der  $\Phi(t_k, y)$  besitzt eine konvergente Teilfolge, und der Grenzwert  $z$  dieser Teilfolge liegt in  $\omega(y)$  und erfüllt  $\text{dist}(z, A_i) \geq \varrho/3, i = 1, 2$ . Also  $\omega(y) \not\supseteq A_1 \cup A_2$ ; Widerspruch.

□

Einen speziellen Fall von Limesmengen können wir vollständig abhandeln; vergleiche auch Beispiel (4.3) a).

**(4.5) Korollar.** Voraussetzung wie in (4.4). Falls  $\omega(y) = \{z\}$  nur ein Element enthält, dann ist  $z$  stationär und außerdem gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = z$ .

**Beweis.** Stationarität folgt aus der Invarianz von  $\{z\}$ . Wäre  $z$  nicht der Grenzwert von  $\Phi(t, y)$ , so gäbe es ein  $\varrho > 0$  mit der Eigenschaft, dass  $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - z\| \leq 2\varrho\} \subset U$  und dass zu jedem  $t^* > 0$  ein  $\tilde{t} > t^*$  existiert mit  $\varrho \leq \|\Phi(\tilde{t}, y) - z\| \leq 2\varrho$ , denn es gibt ein  $\tau_1 > t^*$  mit  $\|\Phi(\tau_1, y) - z\| > 2\varrho$  und ein  $\tau_2 > \tau_1$  mit  $\|\Phi(\tau_2, y) - z\| < \varrho$ .

Also gibt es eine Folge  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $t_k \rightarrow \infty$  und  $\varrho \leq \|\Phi(t_k, y) - z\| \leq 2\varrho$  für alle  $k$ . Da  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| \leq 2\varrho\} \subset U$ , gibt es dann ein  $v \in \omega(y)$  mit  $\|v - z\| \geq \varrho$ ; Widerspruch.  $\square$

Die explizite Bestimmung von Limesmengen ist in der Regel nicht einfach. Jedoch gibt es spezielle Situationen, wo einem LJAPUNOV-Funktionen zu Hilfe kommen.

**(4.6) Lemma.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , weiter sei  $V \subset U$  offen und nichtleer sowie  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.

Ist  $V^* \subset V$  nichtleer, gilt  $L_f(\psi)(x) \leq 0$  für alle  $x \in V^*$  und ist  $y \in V^*$  derart, dass  $\Phi(t, y) \in V^*$  für alle  $t \in [0, \infty)$ , so ist  $L_f(\psi)(z) = 0$  für alle  $z \in \omega(y) \cap V^*$ .

**Beweis.** Wegen  $\frac{d}{dt}\psi(\Phi(t, y)) = L_f(\psi)(\Phi(t, y)) \leq 0$  für alle  $t \geq 0$  ist  $t \mapsto \psi(\Phi(t, y))$  monoton fallend. Zu  $z \in \omega(y) \cap V^*$  existiert eine Folge  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  positiver reeller Zahlen mit

$$t_k \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \Phi(t_k, y) \rightarrow z \quad (k \rightarrow \infty).$$

Mit Stetigkeit folgt  $\psi(\Phi(t_k, y)) \rightarrow \psi(z)$  und wegen der Monotonie-Eigenschaft gilt

$$\psi(\Phi(t, y)) \geq \psi(z) \quad \text{für alle } t > 0.$$

Annahme:  $L_f(\psi)(z) < 0$ . Dann hat  $t \mapsto \psi(\Phi(t, z))$  bei  $t = 0$  negative Ableitung, also gibt es ein  $\tau > 0$  so, dass  $\psi(\Phi(\tau, z)) < \psi(z)$ . Andererseits existiert  $\Phi(\tau, \Phi(t_k, y)) = \Phi(t_k + \tau, y)$  für fast alle  $k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(\tau, \Phi(t_k, y)) = \Phi(\tau, z)$ , also  $\psi(\Phi(\tau + t_k, y)) < \psi(z)$  für fast alle  $k$ .

Das ist ein Widerspruch.  $\square$

**(4.7) Satz.** (Prinzip von LA SALLE).

Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , weiter sei  $V \subset U$  offen und nichtleer sowie  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.

Ist  $Y \subset V$  positiv invariant und  $L_f(\psi)(x) \leq 0$  für alle  $x \in Y$ , so gilt

$$\omega(y) \cap Y \subset N := \{x \in Y; L_f(\psi)(x) = 0\}.$$

Ist zudem  $Y$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ , so  $\omega(y) \subset N$ .

*Anmerkung:* Die Voraussetzung an die LIE-Ableitung ist insbesondere dann erfüllt, wenn  $\psi$  LJAPUNOV-Funktion auf  $V$  ist.

**Beweis.** a) Nach Voraussetzung ist  $L_f(\psi)(x) \leq 0$  für alle  $x \in Y$  und  $\Phi(t, y) \in Y^*$  für alle  $y \in Y^*$ ,  $t \in I_{\max}(y)$ . Die Behauptung folgt mit (4.6).

Die Abgeschlossenheit von  $Y$  erzwingt  $\omega(y) \subseteq Y$  für alle  $y \in Y$ . Die restliche Aussage wird wie a) bewiesen.  $\square$

**(4.8) Bemerkung.** Ist in (4.7) b) zudem noch  $V$  kompakt, so ist auch  $\omega(y) \neq \emptyset$  gemäß (4.4). Zudem kann man die Invarianz von Limesmengen (vgl. (4.4)) benutzen.

**(4.9) Beispiele.** a) *Gradientensysteme:* Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und nichtleer, und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Abbildung. Das Gradientensystem zu  $\varphi$  ist dann die Gleichung

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial\varphi/\partial x_n \end{pmatrix} \quad (= \text{grad } \varphi(x))$$

Für  $\psi(x) := -\varphi(x)$  ist

$$L_f(\psi(x)) = -\langle \text{grad } \varphi(x), \text{grad } \varphi(x) \rangle \leq 0;$$

mit LASALLE gilt also für jeden  $\omega$ -Limespunkt  $z$ :  $\text{grad } \varphi(z) = f(z) = 0$ ;  $z$  ist also stationär. Alle  $\omega$ -Limespunkte eines Gradientensystems sind stationär.

Das Gleiche gilt für  $\alpha$ -Limespunkte.

b)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \varrho x_1 + x_2 & -(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ -x_1 + \varrho x_2 & -(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{kurz } \dot{x} = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^2, \text{ mit Parameter } \varrho \in \mathbb{R}, \varrho > 0.$$

Die Abbildung  $\varphi : x \mapsto x_1^2 + x_2^2$  ist lösungserhaltend von  $\dot{x} = f(x)$  in die eindimensionale Gleichung

$$\dot{x} = 2(\varrho x - x^2).$$

Im Fall  $\varrho > 0$  folgt  $\varphi(\Phi(t, y)) \rightarrow \varrho$  für  $t \rightarrow \infty$ , für alle  $y \neq 0$ . Also ist  $\omega(y)$  im Kreis  $C : x_1^2 + x_2^2 = \varrho$  enthalten. Dieser Kreis ist eine Lösungsbahn (da  $t \rightarrow \begin{pmatrix} \varrho \cos t \\ -\varrho \sin t \end{pmatrix}$  eine Lösung ist, wie man nachrechnet), und mit Invarianz folgt  $\omega(y) = C$  für alle  $y \neq 0$ .

c) Fadenpendel mit Reibung (vgl. (1.9), (2.9)):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 \end{aligned} \quad (\alpha > 0; \quad \text{kurz } \dot{x} = f(x)).$$

Für  $\varphi(x) := \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$  ist  $L_f(\varphi)(x) = -\alpha x_2^2 \leq 0$ , also liegt für jedes  $y \in \mathbb{R}^2$  die Limesmenge  $\omega(y)$  in der Geraden  $x_2 = 0$ . Die Lösungsbahnen in dieser Geraden lassen sich bestimmen: Ist  $\begin{pmatrix} \mu(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Lösung, so  $\dot{\mu}(t) = 0$  (Einsetzen in die Gleichung), also ist die Lösung stationär.

Wir haben stationäre Punkte  $\begin{pmatrix} k \cdot \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ , wobei  $k \in \mathbb{Z}$ , und dies sind die einzigen Kandidaten für Limesmengen.

(Mit etwas Zusatzarbeit folgt aus (4.4) und (4.5): Jede Lösung konvergiert gegen einen solchen stationären Punkt.)

Anzumerken ist noch, dass natürlich nicht alle Limesmengen mit LASALLE'S Prinzip (oder verwandten Methoden) bestimmt werden können, schon weil nicht immer eine LJAPUNOV-Funktion existiert. Aber LASALLE liefert, wenn es klappt, eine sehr bequeme Methode.

## §5. Stabilität stationärer Punkte

Wie bereits früher angemerkt, ist das lokale Verhalten von Lösungen nur in der Nähe stationärer Punkte interessant. In diesem Abschnitt soll es um einen Aspekt dieses Verhaltens gehen, nämlich um Stabilitätsfragen. Diese sind auch von praktischem Interesse: Beschreibt eine Gleichung den zeitlichen Ablauf eines realen Systems, so entsprechen stationäre Punkte Gleichgewichts- oder Ruhelagen dieses Systems. Ob eine (kleine) Auslenkung aus einer solchen Ruhelage dazu führt, dass das System sich wieder der Ruhelage nähert, oder ob dies ein Weglaufen des Systems von der Ruhelage zur Folge hat, ist auch für Anwendungen relevant.

Zunächst aber zur Definition:

**(5.1) Definition.** Es sei  $y_0$  ein stationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ .

- (i) Der stationäre Punkt  $y_0$  heißt *stabil*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt so, dass für alle  $y \in U$  mit  $\|y - y_0\| < \delta$  die Lösung  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  existiert und  $\|\Phi(t, y) - y_0\| < \varepsilon$  erfüllt. Anderenfalls heißt  $y_0$  *instabil*.
- (ii) Ist  $y_0$  stabil und gibt es ein  $\varrho > 0$  so, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = y_0$  für alle  $y$  mit  $\|y - y_0\| < \varrho$ , dann heißt  $y_0$  *asymptotisch stabil*.

**(5.2) Bemerkung.** Zum Nachweis der Stabilität reicht es, zu zeigen, dass  $\|\Phi(t, y) - y_0\| < \varepsilon$  für alle  $t \in I_{\max}(y)$ ,  $t \geq 0$ . Die Existenz von  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  folgt dann aus Kapitel I, Satz (5.4).

**(5.3) Beispiel.** Für die homogene lineare Differentialgleichung  $\dot{x} = Ax$  ( $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ ) gilt:

Haben alle Eigenwerte von  $A$  Realteil  $< 0$ , dann ist der stationäre Punkt  $0$  asymptotisch stabil. Hat ein Eigenwert von  $A$  Realteil  $> 0$ , dann ist der stationäre Punkt  $0$  instabil.

Dies ergibt sich aus Kapitel II, Satz (2.10).

Zur Untersuchung von Limesmengen ist nützlich:

**(5.4) Lemma.** Ist  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  gegeben, ist  $y_0$  ein stabiler stationärer Punkt und gilt  $y_0 \in \omega(y)$  für ein  $y \in U$ , dann ist  $\omega(y) = \{y_0\}$ .

**Beweis.** Sei  $z \in U \setminus \{y_0\}$ , und  $\varepsilon := \|z - y_0\|/2$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass aus  $\|w - y_0\| < \delta$  stets  $\|\Phi(t, w) - y_0\| < \varepsilon$  folgt, insbesondere  $z \notin \omega(w)$ . Aus  $y_0 \in \omega(y)$  folgt  $\|\Phi(t^*, y) - y_0\| < \delta$  für ein  $t^* > 0$ , also  $z \notin \omega(\Phi(t^*, y)) = \omega(y)$ .  $\square$

**(5.5) Beispiel.** Chemostat (vgl. (1.3), (2.6), (2.11))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c + x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c + x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x)).$$

Hier ist  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + \frac{a}{b} x_2$ , lösungserhaltend in  $\dot{x} = r - \delta x$  auf  $\mathbb{R}$ , und Lösungen mit Anfangswert  $y$  im ersten Quadranten existieren für alle  $t > 0$ .

Es gilt also  $\omega(y) \subset \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1 + \frac{a}{b} x_2 = \frac{r}{\delta}\}$ , da  $\varphi(\Phi(t, y)) \rightarrow \frac{r}{\delta}$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Die Gerade  $Y : \varphi(x) = \frac{r}{\delta}$  ist (wegen  $L_f(\varphi - \frac{r}{\delta}) = -\delta(\varphi - \frac{r}{\delta})$ ) invariant.

Stationäre Punkte im positiven Quadranten bestimmen sich wie folgt. Zunächst hat man

$$\left(\frac{r}{\delta}, 0\right) =: w \quad (\text{keine Mikroben; Zufluss von Substrat, Durchmischung und Abfluss; vgl. Kapitel I, §1 A}).$$

Ein stationärer Punkt  $z = (z_1, z_2)$  mit  $z_2 \neq 0$  erfüllt

$$0 = \frac{bz_1}{c + z_1} - \delta, \quad \text{also} \quad z_1 = \frac{c\delta}{b - \delta} \quad (\text{und } z_1 > 0 \text{ nur für } b > \delta).$$

Einsetzen von  $z_1$  in die erste Gleichung ergibt  $z_2 = \frac{b}{a} \left(\frac{r}{\delta} - \frac{c\delta}{b - \delta}\right)$ , und nur für  $\frac{r}{\delta} > \frac{c\delta}{b - \delta}$  ist  $z_2 > 0$ .

Eine Rechnung (siehe (5.13) b) weiter unten) ergibt: Falls  $z$  existiert und im offenen ersten Quadranten liegt, ist  $z$  asymptotisch stabil.

Für jeden Punkt  $y^* \in Y_0 := \{x \in Y; x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$  lässt sich außerdem nachrechnen, dass

$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = z$ . (Der Ansatz  $\Phi(t, y^*) = v(t) = \begin{pmatrix} \frac{r}{\delta} - \frac{a}{b} \mu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$  liefert z. B. eine elementar lösbare

BERNOULLI - Gleichung für  $\mu(t)$ .)

Also: Für  $y$  im positiven Quadranten ist entweder  $\omega(y) = \{w\}$ , oder  $\omega(y) = \{z\}$ , denn mit  $y^* \in \omega(y) \setminus \{z, w\}$  folgte mit (4.4):  $\omega(y^*) = \{z\} \subset \omega(y)$  und (5.4) zeigt  $\omega(y) = \{z\}$ .

Zur Stabilitätsuntersuchung helfen auch LJAPUNOV-Funktionen:

**(5.6) Satz.** Es sei  $y_0$  stationär für  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ ,  $U^* \subset U$  eine Umgebung von  $y_0$  und  $\varphi : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  eine LJAPUNOV-Funktion mit  $\varphi(y_0) < \varphi(x)$  für alle  $x \in U^* \setminus \{y_0\}$ . (Die Funktion  $\varphi$  besitzt also ein lokales Minimum in  $y_0$ .)

a) Dann ist  $y_0$  ein stabiler stationärer Punkt.

b) Gilt weiterhin, dass keine positive Halbtrajektorie  $\Gamma^+ = \{\Phi(t, z); t \geq 0\}$  mit  $z \in U^*$ ,  $z \neq y_0$  in der Menge  $N := \{x; L_f(\varphi)(x) = 0\} \subset U^*$  liegt, dann ist  $y_0$  asymptotisch stabil. (Dies gilt insbesondere, wenn  $L_f(\varphi)(x) \neq 0$  für alle  $x \neq y_0$ .)

**Beweis.** ☐ Sei  $\varphi(y_0) = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - y_0\| \leq \varepsilon\} \subset U^*$ , und  $r := \min\{\varphi(x); \|x - y_0\| = \varepsilon\}$ . Weil  $\varphi$  stetig und  $\varphi(y_0) = 0$ , gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $\delta < \varepsilon$  und  $\varphi(x) < r$  für alle  $x$  mit  $\|x - y_0\| < \delta$ .

Gezeigt wird: Aus  $\|y - y_0\| < \delta$  folgt  $\|\Phi(t, y) - y_0\| < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ . Wäre dem nicht so, so gäbe es ein  $t_0 > 0$  so, dass  $\|\Phi(t_0, y) - y_0\| = \varepsilon$ , aber  $\|\Phi(t, y) - y_0\| < \varepsilon$  für alle  $t \in [0, t_0)$ . Andererseits ist  $t \mapsto \varphi(\Phi(t, y))$  auf  $[0, t_0]$  monoton fallend, also  $\varphi(\Phi(t, y)) \leq \varphi(y) < r$ ; Widerspruch zu  $\varphi(\Phi(t_0, y)) \geq r$  wegen  $\|\Phi(t_0, y) - y_0\| = \varepsilon$ . Damit ist a) gezeigt. Teil b) folgt mit LASALLES Prinzip (4.6) und Invarianz von Limesmengen (4.4). ☐

**(5.7) Beispiel.** Fadenpendel mit Reibung (vgl. (1.9), (2.9), (4.9)):

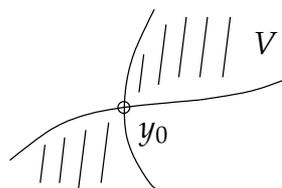
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 \end{aligned}$$

Hier ist  $y = 0$  stationär, und mit  $\varphi(x) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$  gilt  $\varphi(0) = -1$ ,  $\varphi(x) > -1$  für  $x \neq 0$  in einer Umgebung  $U^*$  von 0. Aus  $L_f(\varphi)(x) = -\alpha x_2^2 \leq 0$  und der Tatsache, dass  $\{x; x_2 = 0\}$  nur stationäre Punkte als invariante Teilmengen besitzt, folgt asymptotische Stabilität von  $y = 0$  (und ebenso für  $y = (k\pi, 0)$  mit geradem  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Nun zu einem Instabilitätskriterium, das auf CHETAEV zurückgeht.

**(5.8) Satz.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$  mit stationärem Punkt  $y_0$ . Weiter sei  $U^* \subset U$  offene Umgebung von  $y_0$ ,  $\varphi : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion, und  $V$  eine Zusammenhangskomponente von  $U^* := \{x \in U^*; \varphi(x) < \varphi(y_0)\}$ , so dass  $y_0 \in \partial V$ . Falls dann  $L_f(\varphi)(x) < 0$  für alle  $x \in V$ , dann ist  $y_0$  instabil.

(Beachte: Die Voraussetzung gilt insbesondere, wenn  $L_f(\varphi)(x) < 0$  für alle  $x \in U^* \setminus \{y_0\}$ .)



( $U^*$  schraffiert)

**Beweis.** ☐ Sei wieder  $\varphi(y_0) = 0$ , und  $y_0 = 0$ . Sei  $r > 0$  so, dass  $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq r\} \subset U^*$ , und  $y \in V$  mit  $\|y\| < r$  (wegen  $0 \in \partial V$  existiert solch ein  $y$ ). Es reicht zu zeigen, dass  $\|\Phi(t_0, y)\| = r$  für ein  $t_0 > 0$ .

- (i) Angenommen,  $\|\Phi(t, y)\| < r$  für alle  $t \geq 0$ . Dann ist  $\Phi(t, y) \in V$  für alle  $t \geq 0$ , denn  $\varphi(y) < 0$  und  $L_f(\varphi)(x) < 0$  für alle  $x \in V$  zeigt  $\varphi(\Phi(t, y)) \leq \varphi(y) < 0$ .
- (ii) Nun setze  $K := \{x \in V; \|x\| \leq r \text{ und } \varphi(x) \leq \varphi(y)\}$ . Dies ist eine kompakte Teilmenge von  $V$ , denn ist  $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K$ , die gegen ein  $z \in \mathbb{R}^n$  konvergiert, so ist  $z \in \overline{V} \cap U^*$  und  $\varphi(z) \leq \varphi(y) < 0$ , also  $z \in V$  (denn auf  $\partial V$  gilt  $\varphi(x) = 0$ ) sowie  $\|z\| \leq r$ . Aus (i) ergibt sich  $\Phi(t, y) \in K$  für alle  $t \geq 0$ .

(iii) Nun hat  $L_f(\varphi)$  ein Maximum  $\alpha$  auf  $K$ , welches nach Voraussetzung negativ ist. Es folgt

$$\frac{d}{dt} \varphi(\Phi(t, y)) \leq \alpha \quad \text{und} \quad \varphi(\Phi(t, y)) \leq \varphi(y) + \alpha t \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

Dies ist ein Widerspruch, da  $\varphi$  auf  $K$  beschränkt ist. □

**(5.9) Beispiel.**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + \gamma_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \gamma_2(x) \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x)).$$

mit  $C^1$ -Funktionen  $\gamma_1, \gamma_2$  in einer Nullumgebung von  $\mathbb{R}^2$  derart, dass  $\frac{\gamma_1(x)}{\|x\|^2} \rightarrow 0$  und  $\frac{\gamma_2(x)}{\|x\|} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ . Setze  $\psi(x) := -x_1 + x_2^2$ . Dann

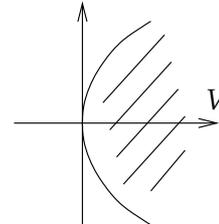
$$L_f(\psi)(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - \underbrace{(\gamma_1(x) + 2x_2 \cdot \gamma_2(x))}_{=:\mu(x)}$$

Ist  $\| \cdot \|$  die Euklidische Norm, so gilt

$$\mu(x)/\|x\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0, \quad \text{also wegen } x_1^2 + 2x_2^2 \geq \|x\|^2:$$

$$L_f(\psi)(x) \leq \|x\|^2 \left( -1 - \frac{\mu(x)}{\|x\|^2} \right),$$

und es gibt eine Nullumgebung  $U^*$  so, dass  $L_f(\psi)(x) < 0$  für alle  $x \in U^* \setminus \{0\}$ . Setze  $V := \{x; \psi(x) < 0\} \subset U^*$ . Wegen  $0 \in \partial V$  ist Satz (5.8) anwendbar.



Einen systematischen Zugang zu Stabilitäts- und Instabilitätsaussagen erhält man über die Eigenwerte der linearen Approximation in einem stationären Punkt.

Gegeben sei also ein stationärer Punkt  $y_0 \in U$  von  $\dot{x} = f(x)$ ; weil  $f$  eine  $C^1$ -Abbildung ist, hat man

$$(*) \quad f(x) = A \cdot (x - y_0) + g(x - y_0)$$

mit  $A = Df(y_0) \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$  und einer  $C^1$ -Funktion  $g$  derart, dass  $\frac{g(z)}{\|z\|} \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow 0$ .

Für lineare Differentialgleichungen haben wir in Kapitel II, Satz (2.10) gesehen, dass die Eigenwerte für Stabilität oder Instabilität wesentlich sind. Wir zeigen nun, dass sich dies lokal auf nichtlineare Gleichungen überträgt. Den folgenden Stabilitätssatz könnte man auch mit Hilfe geeignet konstruierter LJAPUNOV-Funktionen beweisen. Wir wählen hier einen anderen Zugang, der die Aussage von Kapitel II, Satz (2.10) a) voll ausnutzt.

**(5.10) Satz.** *Es sei  $y_0 \in U$  ein stationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$ . Wenn alle Eigenwerte von  $A := Df(y_0)$  Realteil  $< 0$  haben, dann ist  $y_0$  asymptotisch stabil.*

**Beweis.** Wir dürfen  $y_0 = 0$  annehmen, nach (\*) ist also

$$f(x) = Ax + g(x).$$

Wir wählen Normen auf  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  – beide mit  $\| \cdot \|$  bezeichnet – so dass  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$  für alle  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ , alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(i) Nach Kapitel II, Satz (2.10) gibt es positive Konstanten  $\beta$  und  $M$ , so dass

$$\|\exp(tA) \cdot y\| \leq Me^{-\beta t} \cdot \|y\| \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Wähle  $0 < R < \frac{\beta}{M}$  (also  $RM - \beta < 0$ ).

Wegen  $Dg(0) = 0$  und Stetigkeit gibt es dann ein  $\rho > 0$  so, dass  $\|Dg(x)\| < R$  für alle  $x$  mit  $\|x\| < \rho$ , und folglich  $\|g(x)\| \leq R \cdot \|x\|$  für all diese  $x$ .

Betrachte nun für  $y$  mit  $\|y\| < \rho$  die *Entweichzeit*

$$T_e(y) = \sup\{T > 0; \|\Phi(t, y)\| \leq \rho, \quad \text{alle } t \in [0, T]\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wir werden zeigen, dass

$$T_e(y) = \infty \quad \text{für alle } y \quad \text{mit } \|y\| < \frac{\rho}{2M}.$$



(ii) Zunächst zeigen wir für alle  $y$  mit  $\|y\| < \rho$  und alle  $t \in [0, T_e(y))$  die Ungleichung

$$(†) \quad \|\Phi(t, y)\| \leq M \cdot \|y\| \cdot e^{(RM-\beta)t}.$$

Dabei wird ein bemerkenswerter Trick verwendet:

$\Phi(t, y)$  löst auch die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = A \cdot x + g(\Phi(t, y)).$$

Mit Variation der Konstanten (Kapitel II, Satz (1.8); siehe auch Kapitel II, Satz (2.5)) gilt also

$$\Phi(t, y) = \exp(tA) \cdot y + \int_0^t \exp((t-s)A) \cdot g(\Phi(s, y)) \, ds.$$

Für  $0 \leq t < T_e(y)$  folgt mit Standard-Abschätzungen und nach Wahl von  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, y)\| &\leq M \cdot e^{-\beta t} \cdot \|y\| + \int_0^t M \cdot e^{-\beta(t-s)} \cdot \|g(\Phi(s, y))\| \, ds \\ &\leq M \cdot e^{-\beta t} \cdot \|y\| + \int_0^t M \cdot e^{-\beta(t-s)} \cdot R \|\Phi(s, y)\| \, ds, \end{aligned}$$

oder

$$e^{\beta t} \|\Phi(t, y)\| \leq M \cdot \|y\| + M \cdot R \cdot \int_0^t e^{\beta s} \|\Phi(s, y)\| \, ds.$$

Nach GRONWALLS Lemma (Kapitel III, (1.7)) folgt

$$e^{\beta t} \|\Phi(t, y)\| \leq M \cdot \|y\| \cdot e^{RMt}, \quad 0 \leq t < T_e(y),$$

also (†).

(iii) Nun folgt sofort  $T_e(y) = \infty$  für (z. B.)  $\|y\| \leq \frac{\rho}{2M}$ , denn (†) impliziert dann  $\|\Phi(t, y)\| \leq \frac{\rho}{2}$  für  $0 \leq t < T_e(y)$ . (Wäre  $T_e(y)$  endlich, so gäbe es ein  $\tau > 0$  so, dass  $\|\Phi(t, y)\| < \rho$  für alle  $0 \leq t < T_e(y) + \tau$ ; Widerspruch.) Als zweites folgt mit (†) Stabilität, wenn man im Argument  $\rho$  durch  $\varepsilon \leq \rho$  ersetzt und  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$  wählt. Schließlich gilt  $e^{(RM-\beta)t} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ), also ergibt sich asymptotische Stabilität.  $\square$

Für den Instabilitätssatz deuten wir zumindest an, wie sich im Beweis mit LJAPUNOV argumentieren lässt.

**(5.11) Satz.** *Es sei  $y_0 \in U$  ein stationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$ . Hat ein Eigenwert von  $A := Df(y_0)$  Realteil  $> 0$ , so ist  $y_0$  instabil.*

**Beweis** nur für den Spezialfall, dass  $A$  diagonalisierbar ist und alle Eigenwerte von  $A$  reell und  $\neq 0$  sind:

Weil invertierbare lösungserhaltende  $C^1$ -Abbildungen an Stabilität oder Instabilität nichts ändern, können wir nach (1.3) d) annehmen, dass

$$f(x) = Ax + g(x) \quad \text{und} \quad A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit reellen  $\lambda_i$ . Weiter können wir annehmen, dass  $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} < 0, \dots, \lambda_n < 0$  für ein  $r \geq 1$ .

Setze nun

$$\varphi(x) := -x_1^2 + \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Dann gilt

$$L_A(\varphi)(x) = D\varphi(x)Ax = -2 \sum |\lambda_i| x_i^2 \leq -\alpha \cdot \|x\|^2$$

für ein geeignetes  $\alpha > 0$  (mit der euklidischen Norm).

Weiter ist  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$ , also gibt es ein  $\rho > 0$  so, dass  $\|g(x)\| \leq \frac{\alpha}{4} \cdot \|x\|$  für alle  $x$  mit  $\|x\| < \rho$ .

Für  $\|x\| < \rho$ ,  $x \neq 0$  ist also

$$\begin{aligned} L_f(\varphi)(x) &= L_A(\varphi)(x) + L_g(\varphi)(x) \\ &\leq -\alpha \cdot \|x\|^2 + \|\text{grad } \varphi(x)\| \cdot \|g(x)\| \\ &\leq -\alpha \cdot \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \frac{\alpha}{4} \cdot \|x\| \\ &\leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Das Instabilitätskriterium aus Satz (5.8) greift nun. □

Der Beweis ist nicht wesentlich komplizierter, wenn man  $A$  als komplex diagonalisierbar voraussetzt und annimmt, dass alle Eigenwerte Realteil  $\neq 0$  haben. In der Diagonale treten dann bei der reellen Normalform noch Blöcke der Gestalt  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  ( $\alpha \neq 0$ ) auf und der Beweis läuft analog. Subtiler wird die Lage, wenn Eigenwerte mit Realteil 0 oder nichttriviale JORDAN-Blöcke auftreten.

**(5.12) Bemerkung.** Nach (5.10) und (5.11) bleibt die Stabilitätsfrage noch in dem Fall ungeklärt, wenn  $\text{Re } \lambda \leq 0$  für alle Eigenwerte von  $A$  gilt, aber tatsächlich Eigenwerte mit Realteil 0 existieren. Hier genügt die lineare Approximation nicht, um die Frage zu entscheiden. Ist  $f$  eine  $C^r$ -Abbildung mit genügend großem  $r$ , so kann man mit TAYLOR-Entwicklungen höheren Grades unter Umständen auf Stabilität oder Instabilität schließen. Die Sache wird jedoch deutlich komplizierter.

**(5.13) Beispiele.** a) In  $\mathbb{R}^2$  sei gegeben

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \end{aligned} \quad (\text{kurz: } \dot{x} = f(x))$$

Stationäre Punkte sind (genau)

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus  $Df(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$  folgt

$$Df(z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$z$  ist also ersichtlich asymptotisch stabil.

Die Matrix  $Df(w) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte  $-3$  und  $1$ . Also ist  $w$  instabil.

b) Chemostat (vgl. (5.5)):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x))$$

Hier  $Df(x) = \begin{pmatrix} -\frac{ac}{(c+x_1)^2} x_2 - \delta & -\frac{ax_1}{c+x_1} \\ +\frac{bc}{(c+x_1)^2} x_2 & \frac{bx_1}{c+x_1} - \delta \end{pmatrix}$ .

Am stationären Punkt  $w = (\frac{r}{\delta}, 0)$  gilt

$$Df(w) = \begin{pmatrix} -\delta & * \\ 0 & \frac{br}{c\delta+r} - \delta \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $-\delta < 0$ , und  $\frac{br}{c\delta+r} - \delta$ .

Der zweite Eigenwert ist  $< 0$  genau für  $\frac{br}{c\delta+r} < \delta$ , also ist  $w$  lokal asymptotisch stabil, wenn kein zweiter stationärer Punkt im offenen positiven Orthanten existiert, und  $w$  ist instabil, wenn dieser Punkt  $z$  existiert. (Wir ignorieren den Grenzfall  $\frac{br}{c\delta+r} = \delta$ ; dafür trifft (5.12) zu.) Bei  $z$  gilt in diesem Fall

$$Df(z) = \begin{pmatrix} -\frac{ac}{(c+z_1)^2} z_2 - \delta & -\frac{az_1}{c+z_1} \\ \frac{bc}{(c+z_1)^2} z_2 & 0 \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat negative Spur und positive Determinante, also zwei Eigenwerte mit negativem Realteil. Somit ist  $z$  asymptotisch stabil.

**(5.14) Bemerkung.** Das Kriterium von ROUTH und HURWITZ für asymptotische Stabilität.

a) Satz (5.10) wäre von geringem Nutzen, wenn zu seiner Anwendung tatsächlich die Berechnung aller Eigenwerte der Funktionalmatrix erforderlich wäre. Das folgende Kriterium liefert Bedingungen dafür, dass ein normiertes reelles Polynom

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

(insbesondere also das charakteristische Polynom einer reellen  $n \times n$ -Matrix) nur Nullstellen mit Realteil  $< 0$  besitzt. Notwendig und hinreichend hierfür sind

- (i)  $a_k > 0$  für  $0 \leq k \leq n-1$ ,
- (ii)  $\det \Delta_k > 0$  für  $0 \leq k \leq n-1$ ,

wobei

$$\Delta_k := \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & \dots & \dots & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & \dots & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k \times k, \mathbb{R})$$

(mit  $a_l := 0$  für  $l > n$ ,  $a_0 = 1$ ).

b) *Spezialfall:* Beide Eigenwerte einer reellen  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  haben Realteil  $< 0$  genau dann, wenn

$$\text{Spur}(A) < 0 \quad \text{und} \quad \det(A) > 0.$$

Dies haben wir schon weiter oben verwendet (und dies ist auch direkt verifizierbar).

## §6. Weiteres zu Limesmengen

Kombiniert man Aussagen über stationäre Punkte mit Eigenschaften von Limesmengen, so lässt sich ein vertiefter Einblick gewinnen. Zunächst setzen wir Eigenschaften asymptotisch stabiler stationärer Punkte in einen allgemeineren Rahmen.

**(6.1) Definition.** Es sei  $M \subset U$ .

a) Man sagt, der Punkt  $y \in U$  wird von  $M$  angezogen, falls  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  existiert und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi(t, y), M) = 0$ .

b) Die Menge  $M$  heißt *attraktiv*, falls es eine Umgebung  $V$  von  $M$  in  $U$  gibt, so dass  $M$  jeden Punkt von  $V$  anzieht. In diesem Fall setzt man

$$\mathcal{A}(M) = \{y \in U; y \text{ wird von } M \text{ angezogen}\}.$$

**(6.2) Beispiele.** a) Ist  $z$  ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$ , so ist die Menge  $M = \{z\}$  attraktiv, wie unmittelbar aus Definition (5.1) folgt. (Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht!)

b) Für die Gleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \rho x_1 + x_2 & -(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ -x_1 + \rho x_2 & -(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{pmatrix}$$

auf  $\mathbb{R}^2$  mit dem Parameter  $\rho > 0$  (vgl. Beispiel (4.7) b) ist  $C = \{x : x_1^2 + x_2^2 = \rho\}$  eine attraktive Menge, und es gilt  $\mathcal{A}(C) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Aber auch jedes  $M \supset C$  ist eine attraktive Menge.

**(6.3) Bemerkungen.** (a) Wird  $y$  von  $M$  angezogen, so ist ersichtlich  $\omega(y) \subset \overline{M}$ , denn für jedes  $w \in \omega(y)$  gilt  $\text{dist}(w, M) = 0$ .

(b) Manche Autoren nennen eine attraktive Menge auch *Attraktor*, andere (die Mehrheit) verlangen für Attraktoren aber noch Zusatzbedingungen. Ein Grund hierfür ist, dass gewisse Obermengen attraktiver Mengen auch attraktiv sind, und dass man andererseits zu einer abgeschlossenen attraktiven Menge  $M$  die attraktive Teilmenge

$$\tilde{M} = \bigcup_{y \in \mathcal{A}(M)} \omega(y)$$

mit dem gleichen Einzugsgebiet bilden kann:

$$\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(\tilde{M}).$$

(c) Ist  $M$  eine attraktive Menge, so ist  $\mathcal{A}(M)$  invariant. Denn ist  $y \in \mathcal{A}(M)$  und  $z = \Phi(t^*, y)$ , so ist nach Kapitel I, (5.7) auch  $\Phi(t, z) = \Phi(t + t^*, y)$  für alle  $t \geq 0$ , also  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi(t, z), M) = 0$ .

(Allgemeiner gilt: Wird  $y$  von  $M$  angezogen, so auch jedes  $z$  in der Lösungsbahn von  $y$ .)

Wichtig für die qualitative Untersuchung von Differentialgleichungen ist:

**(6.4) Satz.** Ist  $M \subset U$  eine kompakte attraktive Menge, so ist  $\mathcal{A}(M)$  offen. Ist insbesondere  $z$  ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$ , so ist

$$\mathcal{A}(\{z\}) = \{y \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = z\}$$

eine offene Menge.

**Beweis.** Es sei  $V$  wie in Definition (6.1). Dann haben das Kompaktum  $M$  und die abgeschlossene Menge  $\mathbb{R}^n \setminus V$  positiven Abstand.

Zu  $w \in \mathcal{A}(M)$  gibt es also ein  $T > 0$  derart, dass  $\Phi(T, w) \in V$ . Weil  $V$  offen und  $y \mapsto \Phi(T, y)$  in einer Umgebung von  $w$  definiert und stetig ist (siehe Kapitel III (1.5)), gibt es eine offene Umgebung  $V^*$  von  $w$  derart, dass  $\Phi(T, y) \in V$  für alle  $y \in V^*$ . Also  $V^* \subset \mathcal{A}(M)$ ; die Behauptung folgt.  $\square$

**(6.5) Beispiel.** Gegeben sei eine Gleichung  $\dot{x} = f(x)$  auf  $\mathbb{R}^n$ , die zwei asymptotisch stabile stationäre Punkte  $z_1, z_2$  besitzt. Dann gibt es eine Lösung, die für  $t \rightarrow \infty$  weder gegen  $z_1$  noch gegen  $z_2$  konvergiert. Denn andernfalls wäre  $\mathbb{R}^n = \mathcal{A}(\{z_1\}) \cup \mathcal{A}(\{z_2\})$  Vereinigung nichtleerer, disjunkter offener Mengen; Widerspruch zum Zusammenhang von  $\mathbb{R}^n$ . (Das Gleiche gilt, wenn  $\dot{x} = f(x)$  auf einer zusammenhängenden Menge  $U$  gegeben ist.)

Im Allgemeinen werden stationäre Punkte nicht asymptotisch stabil sein. Den "entgegengesetzten" Extremfall betrachten wir als Nächstes.

**(6.6) Definition.** Ein stationärer Punkt  $z \in U$  von  $\dot{x} = f(x)$  heißt *abstoßend*, oder ein *Repellor*, wenn dieser Punkt für  $\dot{x} = -f(x)$  asymptotisch stabil ist.

**(6.7) Bemerkungen.** a) Ist  $z$  abstoßend, so gibt es also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft: Für alle  $y \in U$  mit  $\|y - z\| < \delta$  existiert  $\Phi(t, y)$  für  $-\infty < t \leq 0$ , und es gilt

$$\|\Phi(t, y) - z\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in (-\infty, 0]$$

sowie  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, y) = z$ . Zum Nachweis beachte nur, dass die Lösungen von  $\dot{x} = -f(x)$  aus denen von  $\dot{x} = f(x)$  durch Zeitumkehr hervorgehen.

b) Zeitumkehr liefert auch Kriterien für abstoßende stationäre Punkte. Ist etwa  $z$  stationär und besitzt  $Df(z)$  nur Eigenwerte mit positivem Realteil, dann ist  $z$  abstoßend. Dies folgt aus Satz (5.10).

Abstoßende stationäre Punkte sind für die Untersuchung von Limesmengen uninteressant:

**(6.8) Satz.** Es sei  $z$  ein abstoßender stationärer Punkt für  $\dot{x} = f(x)$ . Gilt dann  $z \in \omega(v)$  für ein  $v \in U$ , so ist  $v = z$ . (Ein abstoßender stationärer Punkt  $z$  kann also für  $v \neq z$  kein  $\omega$ -Limespunkt sein.)

**Beweis.** Annahme:  $v \neq z$  und  $z \in \omega(v)$ . Wähle  $\delta$  zu  $\varepsilon := \frac{1}{2}\|v - z\|$  gemäß (6.7) a). Wegen  $z \in \omega(v)$  gibt es ein  $t^* > 0$ , so dass  $\|\Phi(t^*, v) - z\| < \delta$ . Für alle  $t < 0$  folgt dann

$$\|\Phi(t + t^*, v) - z\| = \|\Phi(t, \Phi(t^*, v)) - z\| < \varepsilon.$$

Die Wahl  $t = -t^*$  ergibt den Widerspruch  $\|v - z\| < \varepsilon = \frac{1}{2}\|v - z\|$ . □

Nun wenden wir uns den verbleibenden Fällen zu. Als Vorbereitung führen wir einige Bezeichnungen ein.

**(6.9) Definition.** Es sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ , und  $A$  besitze keinen Eigenwert mit Realteil 0. (Man sagt dann auch:  $A$  ist hyperbolisch.)  
Es sei  $U_s \subset \mathbb{C}^n$  die Summe aller verallgemeinerten Eigenräume von  $A$  zu Eigenwerten mit Realteil  $< 0$ , sowie  $U_u \subset \mathbb{C}^n$  die Summe aller verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit Realteil  $> 0$ . Dann heißt

$$\begin{aligned} V_s &:= U_s \cap \mathbb{R}^n && \text{der stabile Unterraum von } A, \text{ und} \\ V_u &:= U_u \cap \mathbb{R}^n && \text{der instabile Unterraum von } A. \end{aligned}$$

Zur Erläuterung der Namensgebung betrachte die Differentialgleichung  $\dot{x} = Ax$  und ihre Lösung  $\Phi(t, y)$  zum Anfangswert  $y$ . Aus Kapitel II, (2.7) und Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man:

- Es ist  $y \in V_s$  genau dann, wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = 0$ .
- Es ist  $y \in V_u$  genau dann, wenn  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, y) = 0$ .
- Ist  $y \notin V_s \cup V_u$ , so verlässt  $\Phi(t, y)$  für  $t \rightarrow \infty$  und für  $t \rightarrow -\infty$  jede beschränkte Umgebung von 0.

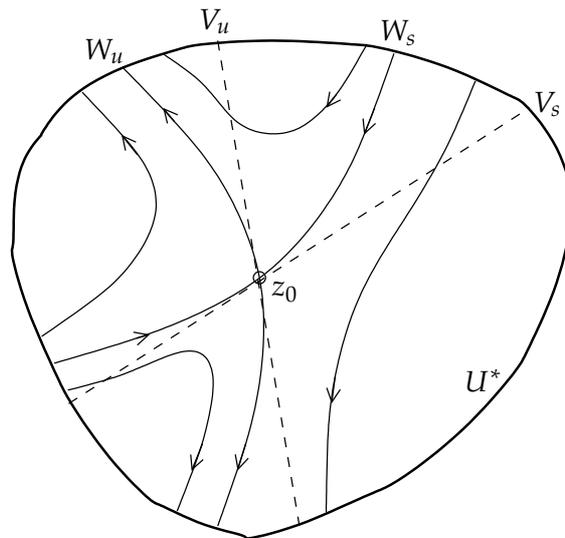
Es gilt nun die bemerkenswerte Tatsache, dass sich diese Eigenschaft lokal auf nichtlineare Differentialgleichungen vererbt. Der Beweis des folgenden Satzes wird hier (auf Grund seiner Länge) nicht geführt.

**(6.10) Satz von der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit.** Es sei  $z_0$  ein stationärer Punkt der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$ , und  $A := Df(z_0)$  habe nur Eigenwerte mit von 0 verschiedenem Realteil. Weiter sei  $V_s \neq \{0\}$  und  $V_u \neq \{0\}$ . Dann gibt es eine beschränkte offene Umgebung  $U^*$  von  $z_0$  sowie  $C^1$ -Untermannigfaltigkeiten  $W_s, W_u$  von  $U^*$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $W_s$  ist in  $z_0$  tangential zu  $z_0 + V_s$ ;  $W_u$  ist in  $z_0$  tangential zu  $z_0 + V_u$ .

- (ii) Falls  $y \in U^*$ , so ist  $y \in W_s$  genau dann, wenn  $\Phi(t, y) \in U^*$  für alle  $t > 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = z_0$ ; und es ist  $y \in W_u$  genau dann, wenn  $\Phi(t, y) \in U^*$  für alle  $t < 0$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, y) = z_0$ .
- (iii) Falls  $y \in U^*$  und  $y \notin W_s \cup W_u$ , so verlässt die Lösung mit Anfangswert  $y$  die Menge  $U^*$  für positive und negative Zeiten.

Man nennt  $W_s$  die *stabile Mannigfaltigkeit* von  $z_0$  und  $W_u$  die *instabile Mannigfaltigkeit* von  $z_0$ .



**(6.11) Bemerkungen.** a) Falls  $A$  nur Eigenwerte mit negativem Realteil oder nur Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt, (also  $W_s = U^*$  oder  $W_u = U^*$ ), dann ist die Aussage schon bekannt; siehe Satz (5.10) und Satz (6.8).

b) Die Eigenschaften von  $W_s$  bzw.  $W_u$  sollen, falls  $A$  sowohl Eigenwerte mit positivem als auch mit negativem Realteil besitzt, noch etwas näher erläutert werden. Zunächst kann man annehmen, dass  $z_0 = 0$  und

$$V_s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R}^r \right\} \quad \text{sowie}$$

$$V_u = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \quad \text{für ein geeignetes } r, 1 \leq r < n.$$

(Ggf. benutze eine lösungserhaltende affine Transformation.)

Dann gibt es eine  $C^1$ -Funktion

$$h_s : U^* \cap V_s \rightarrow V_u$$

mit

$$h_s(0) = 0, \quad Dh_s(0) = 0,$$

so dass für  $y \in U^*$  gilt:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_s \iff y_2 = h_s(y_1).$$

c) Ebenso gibt es eine  $C^1$ -Funktion

$$h_u : U^* \cap V_u \rightarrow V_s$$

mit

$$h_u(0) = 0, \quad Dh_u(0) = 0,$$

so dass für  $y \in U^*$  gilt:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_u \iff y_1 = h_u(y_2).$$

Also ist  $W_s$  der Graph einer  $C^1$ -Funktion von  $V_s \cap U^*$  nach  $V_u$ , und analog für  $W_u$ . (Falls Ihnen der Begriff " $C^1$ -Untermannigfaltigkeit" bisher unbekannt war, können Sie dies als definierende Eigenschaft betrachten.)

Nun wieder zu Limesmengen:

**(6.12) Satz.** (BUTLER und MCGEHEE)

Es sei  $z_0$  ein stationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$ , und  $A := Df(z_0)$  besitze nur Eigenwerte mit Realteil  $\neq 0$ . Falls für  $y \in U$  gilt, dass  $z_0 \in \omega(y)$ , aber  $\omega(y) \neq \{z_0\}$ , dann hat  $\omega(y)$  mit  $W_s \setminus \{z_0\}$  und mit  $W_u \setminus \{z_0\}$  nichtleeren Schnitt.

**Beweis.** Wähle  $r > 0$  so, dass  $K := \overline{K_r(z_0)} \subset U^*$ . Wegen  $z_0 \in \omega(y)$  gibt es eine reelle Folge  $(t_l)$  mit  $t_l \rightarrow \infty$  und  $y_l := \Phi(t_l, y) \rightarrow z_0$  für  $l \rightarrow \infty$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien alle  $y_l \in K$ . Für alle  $l$  gilt  $y_l \notin W_s$ , denn andernfalls

$$y = \Phi(-t_l, y_l) \in W_s \quad \text{und} \quad \omega(y) = \{z_0\}.$$

Also verlässt die Lösung mit Anfangswert  $y_l$  für positive Zeiten ( $U^*$  und)  $K$ ; somit gibt es ein  $\tau_l > 0$  mit  $\Phi(\tau_l, y_l) \in \partial K$ , aber  $\Phi(t, y_l) \in \overset{\circ}{K}$  für  $0 \leq t < \tau_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Aus der stetigen Abhängigkeit (siehe Kapitel III, (1.5)) folgt, dass es zu jedem  $T > 0$  ein  $l_0 = l_0(T)$  gibt derart, dass

$$\|\Phi(t, y_l) - z_0\| < r \quad \text{für alle} \quad t \in [0, T] \quad \text{und} \quad l \geq l_0.$$

Also gilt  $\tau_l \rightarrow \infty$  für  $l \rightarrow \infty$ .

Die Folge der  $\Phi(\tau_l, y_l)$  besitzt in  $\partial K$  einen Häufungspunkt; wir dürfen annehmen, dass sie gegen ein  $z^* \in \partial K$  konvergiert. Nach Konstruktion ist  $z^* \neq z_0$ .

Wir zeigen nun, dass  $\Phi(t, z^*)$  für alle  $t < 0$  in  $K$  (also in  $U^*$ ) liegt. Fixiere dazu  $t < 0$ . Aus  $\lim_{l \rightarrow \infty} y_l = z^*$  folgt

$$\Phi(t, z^*) = \lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(t, \Phi(\tau_l, y_l)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(t + \tau_l, y_l).$$

Für alle hinreichend großen  $l$  gilt aber  $0 < t + \tau_l < \tau_l$ , also  $\Phi(t + \tau_l, y_l) \in K$ . Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  (und die Abgeschlossenheit von  $K$ ) ergibt  $\Phi(t, z^*) \in K$ .

Nach Satz (4.7) folgt  $z^* \in W_u$ . Eine Variante des Arguments liefert ein  $z^{**} \in W_s \cap \omega(y)$ .  $\square$



**(6.13) Beispiel.** Die Chemostat-Gleichung für  $\frac{br}{c\delta+r} < \delta$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta x_2 \end{aligned} \quad (\dot{x} = f(x))$$

(vgl. (5.3), (5.5), (2.6)), besitzt den stationären Punkt  $w = (\frac{r}{\delta}, 0)$ , mit einem positiven und einem negativen Eigenwert von  $Df(w)$ . Die Menge  $Y := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \geq 0 \right\}$  ist auf dem positiven Quadranten invariant, und es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = w$  für alle  $y \in Y$ . Nach Satz (6.10) ist also  $Y \cap U^*$  die stabile Mannigfaltigkeit von  $w$  für jede hinreichend kleine Umgebung  $U^*$  von  $W$ . Eine Lösung, die im offenen positiven Quadranten startet, kann also nicht gegen  $w$  konvergieren. Damit (und z. B. mit der Theorie aus dem folgenden Kapitel) lässt sich zeigen, dass jede Lösung, die im offenen positiven Quadranten startet, gegen den zweiten stationären Punkt konvergiert.

#### Anmerkungen zu Kapitel IV

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für positive Invarianz wird in AMANN, Theorem 16.5 angegeben. Sie verallgemeinert die Kriterien aus §2, insbesondere Satz (2.7) und Satz (2.10). Satz (6.10) geht u.a. auf HARTMAN zurück; siehe auch AMANN, Theorem 19.11. Eine sehr nützliche Verallgemeinerung mit einem klar strukturierten Beweis findet sich bei CHICONE, Theorem 4.1.

## V. Ebene autonome Gleichungen

In diesem Kapitel sei  $n = 2$ , also  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und nichtleer, und gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$ , mit einer  $C^1$ -Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Für solche ebenen Gleichungen gibt es präzise Aussagen über Limesmengen (dank topologischer Besonderheiten des  $\mathbb{R}^2$ ), die zuerst von POINCARÉ und BENDIXSON vor ca. 100 Jahren nachgewiesen wurden. Wir werden einige dieser Aussagen herleiten und nutzen.

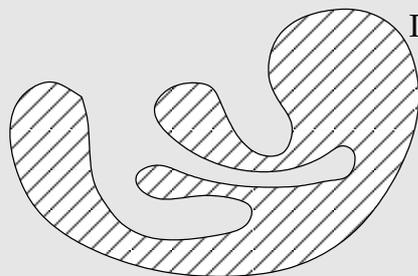
### §1. Topologische Grundlagen und Hilfssätze

Dass man in der Ebene die Struktur von Limesmengen einfach überblicken kann, liegt an der Tatsache, dass geschlossene Kurven die Ebene in disjunkte offene Komponenten zerlegen. Genauer gilt:

**(1.1) Satz.** (JORDANScher Kurvensatz)

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nicht entartetes kompaktes Intervall und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei eine geschlossene, doppel-punktfreie Kurve; d. h.  $\gamma(a) = \gamma(b)$  und  $\gamma(s) = \gamma(t)$  für  $a \leq s < t \leq b$  gilt nur für  $s = a$  und  $t = b$ .

Sei  $\Gamma := \{\gamma(t); a \leq t \leq b\}$  die Bahn dieser Kurve. Dann hat  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  genau zwei Zusammenhangskomponenten und  $\Gamma$  ist der Rand für beide Komponenten. Genau eine dieser Komponenten ist beschränkt; sie wird das Innere von  $\Gamma$  genannt.



Der Satz erscheint anschaulich wohl offensichtlich. Zu beweisen ist er aber keineswegs einfach. (Siehe Topologie, oder Höhere Funktionentheorie.)

**(1.2) Beispiel.** Die Bahn einer nichtkonstanten periodischen Lösung von  $\dot{x} = f(x)$  teilt den  $\mathbb{R}^2$  nach (1.1) in zwei Komponenten auf.

Für  $C^1$ -Kurven ist auch eine lokale Trennungseigenschaft wichtig, die als nächstes formuliert und bewiesen wird.

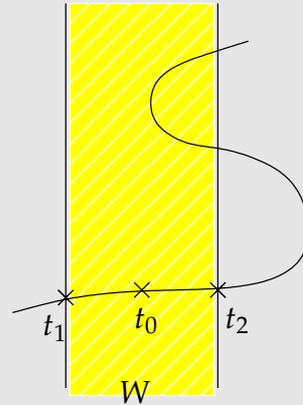
**(1.3) Lemma.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

eine  $C^1$ -Kurve und  $t_0 \in I$  mit  $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$ . Dann gibt es  $t_1, t_2 \in I$  mit  $t_1 < t_0 < t_2$  derart, dass der "Streifen"

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2; \gamma_1(t_1) < x_1 < \gamma_1(t_2)\}$$

die disjunkte Vereinigung von  $\Gamma := \{\gamma(t); t_1 < t < t_2\}$  und zwei offenen, zusammenhängenden Mengen  $W^+$  und  $W^-$  ist.



(NB: Im Fall  $\dot{\gamma}_2(t_0) \neq 0$  gilt eine analoge Aussage, mit vertauschten Rollen für  $x_1$  und  $x_2$ .)

**Beweis.** Wegen  $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$  ist  $t \mapsto \gamma_1(t)$  in einer Umgebung von  $t_0$  umkehrbar; es gibt also  $t_1 < t_0 < t_2$ , so dass  $\{\gamma(t); t_1 < t < t_2\}$  durch  $x_1$  parametrisiert werden kann; d. h. es gibt eine  $C^1$ -Abbildung  $\varphi$  so, dass

$$\{\gamma(t); t_1 < t < t_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \end{pmatrix}; \gamma_1(t_1) < x_1 < \gamma_1(t_2) \right\}$$

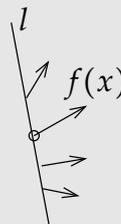
als Graph einer Funktion von  $x_1$  dargestellt werden kann. Nun setze  $W^+ = \{x \in W; x_2 > \varphi(x_1)\}$  und  $W^- = \{x \in W; x_2 < \varphi(x_1)\}$ . Dies sind offensichtlich offene, wegzusammenhängende Mengen, die die Behauptung erfüllen.  $\square$

Nun kommen wir zu Differentialgleichungen:

**(1.4) Definition.** Es sei  $y$  nichtstationär für  $\dot{x} = f(x)$ .

Eine *Transversale*  $l$  durch  $y$  ist das Bild einer Abbildung  $(\beta_1, \beta_2) \rightarrow U, s \mapsto y + sv$ , wobei  $\beta_1 < 0 < \beta_2$  und  $v \neq 0$  derart, dass  $\det(v, f(y + sv)) \neq 0$  für alle  $s$ .

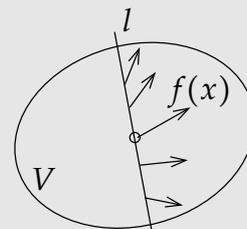
(Anschaulich: Das Vektorfeld zeigt immer auf dieselbe Seite der Transversale.)



**(1.5) Bemerkungen.** a) Durch jeden nichtstationären Punkt  $y$  von  $\dot{x} = f(x)$  gibt es eine Transversale  $l$ , denn  $f$  ist stetig.  $l$  ist Transversale durch jeden ihrer Punkte.

b) Ist  $l$  eine Transversale durch  $y$ , so gibt es eine affine Abbildung  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $\mu(x) = \lambda(x) + \alpha$ , wo  $\lambda$  Linearform,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , mit  $\mu \neq 0$  und  $\mu(l) = \{0\}$ . Dann hat  $L_f(\mu)(x)$  für alle  $x \in l$  das gleiche Vorzeichen, denn

$$L_f(\mu)(x) = \lambda(f(x)) = \lambda(f(y + sv)) \neq 0; \text{ wegen } \lambda(v) = 0.$$



Also gibt es eine Umgebung  $V$  von  $y$ , so dass  $V$  durch  $l$  in genau zwei Zusammenhangskomponenten geteilt wird, von denen nach Kapitel IV, Satz (2.7) eine positiv und eine negativ invariant ist.

Um die Aussage in b) zu verifizieren, wähle zu  $v = (v_1, v_2)^{\text{tr}}$  die Linearform  $\lambda$  mit

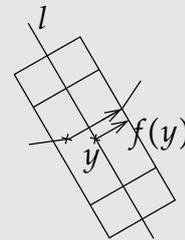
$$\lambda(x) = -v_2 x_1 + v_1 x_2 = (-v_2, v_1) \cdot x.$$

Wäre  $\lambda(f(y + s^* v)) = 0$  für ein  $s^*$ , so wären  $v$  und  $f(y + s^* v)$  linear abhängig, also die entsprechende Determinante gleich Null.

Die folgenden Aussagen sind elementar, aber nützlich:

**(1.6) Lemma.** ("Kreuzungslemma")

Es sei  $y \in U$  nichtstationär,  $l$  eine Transversale durch  $y$  und  $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  affin mit  $\mu \neq 0$ ,  $\mu(l) = 0$ . Dann existiert ein  $\varrho > 0$  und eine Umgebung  $V$  von  $y$  mit folgenden Eigenschaften:



(i) Für jedes  $z \in V$  gibt es ein  $t^*$  mit  $\Phi(t^*, z) \in l$ .

(ii) Weiter gibt es  $t_1 < t^* < t_2$  mit:  $\mu(\Phi(t_1, z)) = -\varrho$ ,  $\mu(\Phi(t_2, z)) = \varrho$  und die Abbildung  $t \mapsto \mu(\Phi(t, z))$  ist auf  $[t_1, t_2]$  streng monoton.

(iii) Es gibt  $T_1, T_2 > 0$  mit  $T_2 \geq t_2 - t_1 \geq T_1$  für alle  $z \in V$ .

**Beweis.** (Skizze) CE sei  $y = 0$ ,  $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\mu(x) = x_1$  (affine Koordinatentransformation; vgl. Kapitel IV, (1.3)). Sei  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$  und  $\tilde{V}$  eine Nullumgebung so, dass für alle  $x \in \tilde{V}$ :

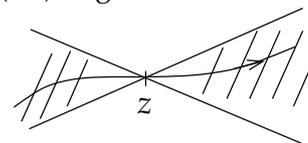
$$1 + \varepsilon \geq f_1(x) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad |f_2(x)| \leq \varepsilon.$$

Wegen  $\dot{x}_1 = f_1(x) \geq 1 - \varepsilon > 0$  ist dann für jede Lösung  $v(t)$  in  $\tilde{V}$  die Zuordnung  $t \mapsto v_1(t)$  strikt monoton und umkehrbar, und  $v_2(v_1)$  erfüllt die Gleichung

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}, \quad \text{mit} \quad \left| \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} =: R.$$

Mit dem Satz zu Differentialungleichungen aus Kapitel III, (1.7) folgt:

Für jedes  $z \in \tilde{V}$  verläuft die Lösung  $\Phi(t, z)$  im "Kegel"  $\{x \in \mathbb{R}^2; |x_2 - z_2| \leq R \cdot |x_1 - z_1|\}$ , solange sie  $\tilde{V}$  nicht verlässt.



Damit lassen sich  $\varrho$  und  $V$  elementargeometrisch konstruieren. □

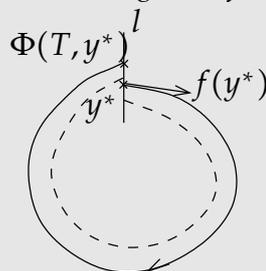
Wenn eine Lösung auf einer Transversale startet und wieder zu ihr zurückkehrt, induziert dies eine  $C^1$ -Abbildung auf  $l$ .

**(1.7) Lemma.** Es sei  $l$  Transversale durch  $y^*$ , mit Bezeichnungen wie in (1.4). Gibt es ein  $t^* > 0$ , so dass  $\Phi(t^*, y^*)$  wieder auf  $l$  liegt, so gibt es ein kleinstes  $T > 0$  mit dieser Eigenschaft.

Weiter gibt es dann eine Nullumgebung

$I \subset (\beta_1, \beta_2)$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tau(0) = T$  und:

- (i)  $\Phi(\tau(s), y^* + sv) \in l$  für alle  $s \in I$ ;
- (ii)  $\tau(s)$  ist die kleinste positive Zeit, zu der die Lösung mit Anfangswert  $y^* + sv$  wieder in  $l$  liegt.



**Beweis.** Die Menge  $M$  der  $t > 0$  mit  $\Phi(t, y^*) \in l$  ist durch eine positive Konstante nach unten beschränkt (siehe (1.6) (iii)), und für das Infimum  $T$  gilt  $\Phi(T, y^*) \in l$  (da  $\mu(\Phi(t, y^*)) = 0$  für  $t \in M$ ).

Nun betrachte auf einer Umgebung von  $(T, y^*)$  in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  die Abbildung

$$\psi : (t, y) \mapsto \mu(\Phi(t, y)).$$

Diese Abbildung ist nach Kapitel III, Satz (2.5) stetig differenzierbar mit

$$\psi(T, y^*) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(T, y^*) = \lambda(f(\Phi(T, y^*))) \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also eine Umgebung  $W$  von  $y^*$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $\tilde{\tau} : W \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{\tau}(y^*) = T$  und  $\psi(\tilde{\tau}(y), y) = 0$  für alle  $y \in W$ . Einschränkung auf  $W \cap l$  (genauer: Vorschalten von  $s \mapsto y + sv$ ) liefert die Behauptung (i). Zu (ii) beachte die lokale Eindeutigkeit der Auflösung im Satz über implizite Funktionen, stetige Abhängigkeit und (1.6) (iii).  $\square$

**(1.8) Definition.** Die Bezeichnungen seien wie in (1.7). Die durch

$$\Phi(\tau(s), y^* + sv) = y^* + \pi(s)v$$

definierte  $C^1$ -Abbildung  $\pi : I \rightarrow (\beta_1, \beta_2)$  heißt POINCARÉ-Abbildung, oder Rückkehrabbildung, zu  $l$  bei  $y^*$ .

**(1.9) Bemerkung.** Der Begriff der Transversalen lässt sich auch auf Dimension  $> 2$  erweitern. Man versteht unter einer Transversalen durch  $y$  dann einen  $(n - 1)$ -dimensionalen affinen Unterraum, der sinngemäß die definierenden Eigenschaften in (1.4) erfüllt. Auch die folgenden Resultate (1.6) und (1.7) lassen sich für  $n > 2$  formulieren und beweisen. Insbesondere hat man auch in höheren Dimensionen eine POINCARÉ-Abbildung.

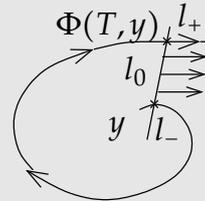
## §2. Die POINCARÉ-BENDIXSON-Theorie

Das fundamentale Resultat über die Rückkehrabbildung in der Ebene ist wie folgt:

### (2.1) Lemma (über die BENDIXSON-Schnecke).

Es sei  $y$  nichtstationär für  $\dot{x} = f(x)$ ,  $l$  eine Transversale durch  $y$ , und  $T > 0$  die kleinste positive Zeit mit  $\Phi(T, y) \in l$ . Dann hat man für  $\Phi(T, y) \neq y$  eine Zerlegung

$$l = l_- \cup \{y\} \cup l_0 \cup \{\Phi(T, y)\} \cup l_+$$



(mit  $y$  im Rand von  $l_-$  und  $l_0$ ,  $\Phi(T, y)$  im Rand von  $l_0$  und  $l_+$ ), und es gilt weiter:

- $\Gamma := \{\Phi(t, y); 0 \leq t \leq T\} \cup l_0$   
ist eine doppelunktfreie geschlossene Kurve, und  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, deren beider Rand  $\Gamma$  ist.
- Die Strecken  $l_+$  und  $l_-$  liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Der Schnitt  $U_+$  der Komponente, welche  $l_+$  enthält, mit  $U$  ist positiv invariant; der Schnitt  $U_-$  der Komponente, welche  $l_-$  enthält, mit  $U$  ist negativ invariant.
- Gibt es ein  $t > T$  mit  $\Phi(t, y) \in l$ , so  $\Phi(t, y) \in l_+$ . Gibt es ein  $t < 0$  mit  $\Phi(t, y) \in l$ , so  $\Phi(t, y) \in l_-$ .

### Beweis. (Skizze)

Zunächst ist mit einem geeigneten  $v \neq 0$  und offenem Intervall  $I$  mit  $0 \in I$ :

$l = \{y + sv; s \in I\}$ ; insbesondere  $\Phi(T, y) = y + s_1 v$ , wobei wir  $s_1 > 0$  annehmen können. Setzt man

$$\begin{aligned} l_- &= \{y + sv; s < 0\}, \\ l_0 &= \{y + sv; 0 < s < s_1\} \quad \text{und} \\ l_+ &= \{y + sv; s > s_1\}, \end{aligned}$$

so ist die Existenz der Zerlegung klar.

- Zu zeigen ist nur, dass  $\Phi(t_1, y) = \Phi(t_2, y)$  mit  $t_1, t_2 \in [0, T]$  auf  $t_1 = t_2$  führt. Aus  $\Phi(t_1, y) = \Phi(t_2, y)$  mit  $t_1, t_2 \in (0, T)$  und etwa  $t_1 < t_2$  folgte

$$\Phi(t_2 - t_1, y) = \Phi(-t_1, \Phi(t_2, y)) = \Phi(-t_1, \Phi(t_1, y)) = \Phi(t_1 - t_1, y) = y \in l;$$

im Widerspruch zur Wahl von  $T$ . Die zweite Aussage ist der JORDANSche Kurvensatz (1.1).

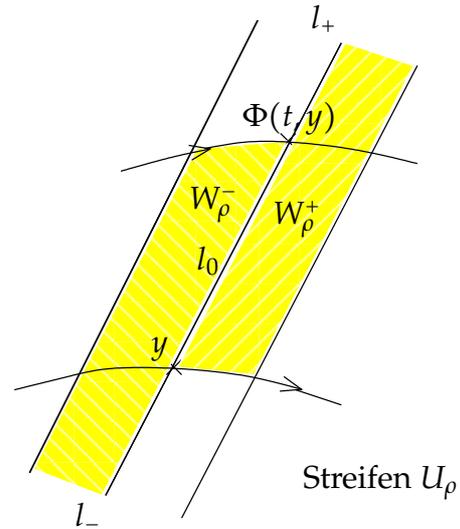
- Anschaulich scheint dies klar:

Die beiden Seiten von  $l_0$  liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten und eine davon ist positiv, die andere negativ invariant. Ein Beweis, der nicht auf anschaulichen Argumenten basiert, geht wie folgt:

Es seien  $V_1, V_2$  die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Weiter sei  $w \neq 0$  orthogonal zu  $v$  und für  $\rho > 0$  setze

$$U_\rho := \{y + sv + rw; s \in I, |r| < \rho\}.$$

Wir können  $U_\rho \subset U$  für hinreichend kleines  $\rho$  annehmen. Dann ist  $U_\rho$  offen und  $U_\rho \setminus l$  hat genau zwei Zusammenhangskomponenten; vgl. Lemma (1.3).



Ebenfalls nach Lemma (1.3) können wir annehmen, dass sowohl  $\{\Phi(t, y); t \text{ nahe } 0\}$  als auch  $\{\Phi(t, y); t \text{ nahe } T\}$  den Streifen  $U_\rho$  in zwei zusammenhängende Komponenten zerlegt. Nun sei  $W_\rho^+$  die Menge aller  $x \in U_\rho$ , die

- (i) auf der selben Seite von  $l$  liegen wie alle  $\Phi(T + \varepsilon, y)$  mit kleinem  $\varepsilon > 0$ ;
- (ii) auf der selben Seite von  $\{\Phi(t, y); t \text{ nahe } 0\}$  liegen wie  $\Phi(T, y)$ .

Analog sei  $W_\rho^-$  die Menge aller  $x \in U_\rho$ , die

- (i) auf der selben Seite von  $l$  liegen wie alle  $\Phi(-\varepsilon, y)$  mit kleinem  $\varepsilon > 0$ ;
- (ii) auf der selben Seite von  $\{\Phi(t, y); t \text{ nahe } T\}$  liegen wie  $\Phi(0, y) = y$ .

Dann ist  $W_\rho^+$  zusammenhängend (vgl. (1.3)). Weil  $l_+$  die definierende Eigenschaft (ii) oben erfüllt, liegt  $l_+ \cap U_\rho$  im Rand von  $W_\rho^+$ ; also ist  $W_\rho^+ \cup l_+$  zusammenhängend. Darüber hinaus gilt: Ist  $\rho$  klein genug, so hat  $W_\rho^+ \cup l_+$  mit  $\Gamma$  leeren Schnitt; siehe Kreuzungslemma (1.6).

Analoge Aussagen gelten für  $W_\rho^-$  und  $W_\rho^- \cup l_-$ .

Die zusammenhängenden Teilmengen  $W_\rho^+ \cup l_+$  sowie  $W_\rho^- \cup l_-$  von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  liegen in je einer Zusammenhangskomponente  $V_1, V_2$ . Sie können nicht in der selben Komponente liegen, da  $l_0$  sonst nicht im Rand von  $V_1$  und  $V_2$  liegen würde. (Beachte, dass jeder Punkt von  $l_0$  eine Umgebung besitzt, welche ganz in  $l_0 \cup W_\rho^+ \cup W_\rho^-$  enthalten ist.) Also liegen  $W_\rho^+ \cup l_+$  und  $W_\rho^- \cup l_-$  in verschiedenen Komponenten, die wir jetzt  $V^+$  bzw.  $V^-$  nennen.

Nun setze  $U^+ := U \cap V^+$ ,  $U^- := U \cap V^-$ . Dann gilt  $U = U^+ \cup \Gamma \cup U^-$ . Um zu zeigen, dass  $U^+$  positiv invariant ist, nehme man an, dass dem nicht so wäre. Dann existiert eine Lösung  $\Phi(t, z)$  die in  $U^+$  startet und für ein  $t > 0$  in  $\Gamma \cup U^-$  liegt; also gibt es ein  $t^* > 0$  so, dass  $\Phi(t, z) \in U^+$  für  $0 \leq t < t^*$ ,  $\Phi(t^*, z) \in \Gamma$ . Dies ist aber unmöglich, da zum einen  $z$  nicht auf der Lösungsbahn durch  $y$  liegen kann (also  $\Phi(t^*, z) = \Phi(\hat{t}, y)$  für  $0 \leq \hat{t} \leq T$  nicht möglich ist), und aus  $\Phi(\hat{t}, z) \in l_0$  folgt  $\Phi(t^* - \varepsilon, z) \in U^-$  für kleine  $\varepsilon > 0$  (vergleiche lokale Invarianzeigenschaften von  $U_\rho$ ). Analog folgt die negative Invarianz von  $U^-$ .

c) ist dann mit dem Beweis von b) klar. □

**(2.2) Satz.** ("Monotoniesatz")

Es sei  $y$  nichtstationär für  $\dot{x} = f(x)$ , und die Lösungsbahn durch  $y$  sei nicht geschlossen. Ist  $l$  eine Transversale durch  $y$  (Bezeichnungen wie in (1.4)), und sind

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r$  derart, dass

$$\Phi(t_k, y) = y + s_k v \in l,$$

so ist die Folge  $(s_1, s_2, \dots, s_r)$  streng monoton.

**Beweis.** ☐ seien die  $t_k$  jeweils die kleinsten Zeiten mit  $\Phi(t, y) \in l$  und  $t > t_{k-1}$  (resp.  $t > 0$ ). Im Fall  $r = 2$  benutze (2.1): Aus  $s_1 > 0$  folgt  $s > s_1$  für alle  $s \in l_+$ , also  $s_2 > s_1$  wegen  $\Phi(t_2, y) \in l_+$ ; analog für den Fall  $s_1 < 0$ . Der Rest ist Induktion nach  $r$ . ☐

Man entnimmt dem Beweis auch, dass im Fall  $\Phi(t_1, y) \neq y$  die Lösungsbahn durch  $y$  nicht geschlossen sein kann.

**(2.3) Korollar.** Es sei  $y$  ein nichtstationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$ .

a) Ist die Lösungsbahn durch  $y$  nicht geschlossen, so gibt es ein  $\varrho > 0$  mit

$$\|\Phi(t, y) - y\| \geq \varrho \quad \text{für alle hinreichend großen } t.$$

b) Ist  $\{\Phi(t, y); t \in I_{\max}(y)\} \cap \omega(y) \neq \emptyset$ , so ist die Lösungsbahn durch  $y$  geschlossen.

**Beweis.** a) Sei  $l$  eine Transversale durch  $y$ . Nach dem Kreuzungslemma (1.6) gibt es ein  $\varrho_0 > 0$  so, dass für jedes  $\varrho \leq \varrho_0$  ein  $\tau > 0$  existiert mit der Eigenschaft: Ist  $\|z - y\| < \frac{\varrho}{2}$ , so ist  $\Phi(t, z) \in l$  und  $\|\Phi(t, z) - y\| < \varrho$  für ein  $t$  mit  $|t| < \tau$ . Wäre also die Aussage von a) falsch, so gäbe es erstens eine kleinste positive Zeit  $t_1$  mit  $\Phi(t_1, y) \in l$ , und zweitens zu  $\varrho < \|\Phi(t_1, y) - y\|$  beliebig große  $t^*$  mit  $\|\Phi(t^*, y) - y\| < \frac{\varrho}{2}$ , also  $\|\Phi(t^* + t, y) - y\| < \varrho$  und  $\Phi(t^* + t, y) \in l$  für ein  $t \in ] - \tau, \tau[$ . Dies widerspricht der Monotonieaussage von (2.2).

b) Wegen Kapitel IV, Lemma (4.2) gilt  $y \in \omega(y)$ . Die Behauptung folgt dann mit a). ☐

**(2.4) Korollar.** Es sei  $y$  nichtstationärer Punkt von  $\dot{x} = f(x)$  und  $l$  eine Transversale durch  $y$ . Dann enthält  $\omega(y) \cap l$  höchstens einen Punkt.

**Beweis.** Ist die Lösungsbahn durch  $y$  geschlossen, so ist  $y$  der einzige Schnittpunkt der Bahn mit  $l$  (Anmerkung nach (2.2)), und die Behauptung folgt. Es sei also im Folgenden die Lösungsbahn durch  $y$  nicht geschlossen. Ist  $z \in \omega(y) \cap l$ , so hat  $\{\Phi(t, y); t \geq 0\}$  nach (1.6) unendlich viele Schnittpunkte mit  $l$ . Sei  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine strikt monotone Folge mit  $t_k \rightarrow \infty$  so, dass

$$\Phi(t, y) \in l, \quad t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = t_k \quad \text{für ein } k.$$

Mit  $\Phi(t_k, y) = y + s_k v$  (Terminologie aus (1.4)),  $z = y + \tilde{s} v$ , ist die Folge der  $s_k$  streng monoton gemäß (2.2), also hat sie nicht mehr als einen Häufungspunkt, und  $\tilde{s}$  ist ein solcher. ☐



**(2.5) Bemerkung.** Die Aussage lässt sich verschärfen: Ist  $l$  Transversale durch einen beliebigen Punkt, so gibt es in  $\omega(y) \cap l$  höchstens einen Punkt. Denn ist  $z \in \omega(y) \cap l$ , so gibt es nach Definition und (1.6) ein  $t^* > 0$  mit  $\Phi(t^*, y) \in l$ , und man kann  $y$  durch  $\Phi(t^*, y)$  ersetzen.

Ein letztes vorbereitendes Resultat vor unserem Hauptsatz:

**(2.6) Lemma.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^2$ , und  $y \in U$  sei so, dass  $\Phi(t, y)$  für alle  $t \in (0, \infty)$  existiert. Wenn dann  $\omega(y)$  eine geschlossene Lösungsbahn  $\Delta$  enthält, so ist  $\omega(y) = \Delta$ .

**Beweis.** Annahme: Es gibt ein  $w \in \omega(y) \setminus \Delta$ . Dann haben  $w$  und  $\omega(y)$  positiven Abstand  $\rho$ . Wähle nun  $v \in \Delta$ ,  $l$  Transversale durch  $v$ ,  $T > 0$  minimal so, dass

$$\Phi(T, v) = v.$$

Es gibt (mit stetiger Abhängigkeit) ein  $\delta > 0$  so, dass für  $z \in l$ ,  $z = \Phi(t^*, y)$  mit  $\|z - v\| < \delta$  gilt:

$$\|\Phi(t, z) - \Phi(t, v)\| < \frac{\rho}{4} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Bezeichnet man mit  $\tau(z)$  die kleinste positive Zeit mit  $\Phi(t, z) \in l$ , so gilt für hinreichend kleines  $\delta$  auch noch

$$\|\Phi(\tau(z), z) - v\| = \|\Phi(\tau(z), z) - \Phi(T, v)\| < \frac{\rho}{2}.$$

Nach Wahl von  $\rho$  gilt  $\|\Phi(t, z) - w\| \geq \frac{\rho}{2}$  für  $0 \leq t \leq \tau(z)$ .

Ist  $\Phi(\tau(z), z) = z$ , so ist die Lösung durch  $z$  periodisch und  $\|\Phi(t, z) - w\| \geq \frac{\rho}{2}$  für alle  $t > 0$ .

Ist  $\Phi(\tau(z), z) \neq z$ , so muss wegen (2.1) und  $\Delta \subset \omega(y) = \omega(z)$  gelten

$$\|\Phi(\tau(z), z) - v\| < \|z - v\| < \delta.$$

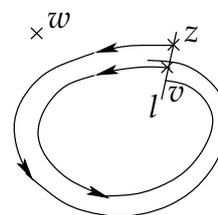
(Betrachte die "Schnecke", die von  $l$  und den  $\Phi(t, z)$ ,  $0 \leq t \leq \tau(z)$  gebildet wird und beachte, dass entweder  $z$  zwischen  $v$  und  $\Phi(\tau(z), z)$  liegt oder  $\Phi(\tau(z), z)$  zwischen  $v$  und  $z$ . Der JORDANSche Kurvensatz für  $\Delta$  schließt die Möglichkeit aus, dass  $v$  zwischen  $z$  und  $\Phi(\tau(z), z)$  liegt.)

Nun lässt sich das Argument mit  $\Phi(\tau(z), z)$  statt  $z$  wiederholen, usw. Es folgt  $\|\Phi(t, z) - w\| \geq \frac{\rho}{2}$  für alle  $t > 0$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $w \in \omega(y) = \omega(z)$ .  $\square$

Das wichtigste Resultat der Theorie ist:

**(2.7) Satz von POINCARÉ und BENDIXSON.** Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^2$ , und  $y \in U$  sei so, dass  $\Phi(t, y)$  für alle  $t > 0$  existiert.

- a) Ist  $z \in \omega(y)$ , so ist entweder  $\omega(z) = \emptyset$ , oder jeder Punkt von  $\omega(z)$  ist stationär, oder die Lösungsbahn  $\Delta$  durch  $z$  ist geschlossen mit  $\omega(y) = \Delta$ .
- b) Wenn  $\{\Phi(t, y); t \in [0, \infty)\}$  in einem Kompaktum  $K \subset U$  enthalten ist, und  $\omega(y)$  keinen stationären Punkt enthält, dann ist  $\omega(y)$  eine geschlossene Lösungsbahn.



**Beweis.** a) Falls  $\omega(z)$  einen nichtstationären Punkt  $z^*$  enthält, sei  $l$  eine Transversale durch  $z^*$ . Nach (1.6) gibt es ein  $t_1 > 0$  mit  $\Phi(t_1, z) \in l$ , also liegen  $\Phi(t_1, z)$  und  $z^*$  in  $\omega(y) \cap l$ . Mit (2.4) ergibt sich  $z^* = \Phi(t_1, z)$ , also ist nach (2.3) b) die Lösungsbahn  $\Delta$  durch  $z$  geschlossen, und  $\Delta \subset \omega(y)$ . Mit (2.6) folgt  $\omega(y) = \Delta$ .

b) Nach Kapitel IV, Satz (4.4) ist  $\omega(y) \neq \emptyset$  und enthält mit einem Punkt  $z$  auch  $\omega(z)$ , weiter ist  $\omega(z) \neq \emptyset$ . Weil  $\omega(y)$  keinen stationären Punkt enthält, ist die Lösungsbahn durch  $z$  nach a) geschlossen, und gleich  $\omega(y)$ .  $\square$

Die wesentliche Aussage von (2.7) a) ist also, dass Limesmengen von Limespunkten einfache Gestalt haben. Eine typische Anwendung dieses Satzes geht wie folgt:

**(2.8) Beispiel.** Die Gleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)x =: f(x) \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

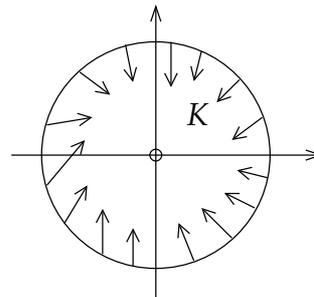
hat eine nichtkonstante periodische Lösung.

Zum Nachweis setze  $B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma(x) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ .

Dann gilt für  $\varphi(x) := x_1^2 + x_2^2$ :  $L_B(\varphi) = 4\varphi$ . Weiter gibt es  $0 < c_1$  mit

$$c_1\varphi(x) \leq \sigma(x).$$

(Denn  $\sigma$  ist positiv definit, nimmt also auf dem Kompaktum  $\{x; \varphi(x) = 1\}$  positives Minimum an.)



Mit  $L_f(\varphi) = 4\varphi - 2\sigma \cdot \varphi$  folgt nun:  $L_f(\varphi) \leq 4\varphi - 2c_1\varphi^2$  und es gibt deshalb  $0 < R$  derart, dass  $L_f(\varphi)(x) < 0$  für alle  $x$  mit  $\varphi(x) = R$ .

Nach Kapitel IV, Satz (2.7) ist  $K := \{x; \varphi(x) \leq R\}$  positiv invariant. Der einzige stationäre Punkt der Gleichung ist 0, denn  $f(y) = 0$  und  $y \neq 0$  liefert  $By = \sigma(y) \cdot y \in \mathbb{R}y$ , aber  $B$  hat keine reellen Eigenvektoren. Weiter besitzt  $Df(0) = 0$  die Eigenwerte  $2 \pm i$  mit positivem Realteil, also ist der stationäre Punkt 0 abstoßend.

Sei nun  $y \neq 0$  mit  $\|y\| \leq R$ . Dann ist  $\omega(y) \neq \emptyset$  nach IV, Satz (4.4), und  $\omega(y)$  enthält wegen IV, Satz (6.8) nicht den stationären Punkt 0. Nach (2.7) ist  $\omega(y)$  eine geschlossene Lösungsbahn. Insbesondere besitzt die Gleichung nichtkonstante periodische Lösungen.

Es sind neben Existenzkriterien auch Nichtexistenzkriterien für geschlossene Lösungsbahnen interessant. Das erste (das auf Kapitel III, Bemerkung (2.3) und dem RIEMANNschen Abbildungssatz beruht) geben wir ohne Beweis an:

**(2.9) Satz.** Es sei  $\Delta \subset U$  eine geschlossene Lösungsbahn für  $\dot{x} = f(x)$ . Ist das Innere von  $\Delta$  (d. i. die beschränkte Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ ) in  $U$  enthalten, so enthält dieses Innere einen stationären Punkt.

**(2.10) Satz.** (BENDIXSONS Kriterium)

Es sei  $U^* \subset U$  offen und einfach zusammenhängend, und es gelte  $\operatorname{div} f(x)$  (= Spur  $Df(x)$ )  $\leq 0$  für alle  $x \in U^*$ , und  $\{x \in U^*; \operatorname{div} f(x) = 0\}$  enthalte keinen inneren Punkt. Dann enthält  $U^*$  keine geschlossene Lösungsbahn.

**Beweis.** Angenommen,  $\Delta = \{v(t); 0 \leq t \leq T\}$  ist die Bahn einer periodischen Lösung  $v$  in  $U^*$ . Weil  $U^*$  einfach zusammenhängend ist, ist das Innere  $U_0$  von  $\Delta$  in  $U^*$  enthalten. Nach Voraussetzung an  $\operatorname{div} f$  gilt

$$\int_{U_0} \operatorname{div} f \, d\lambda_2(x) < 0.$$

Andererseits ist dieses Integral nach dem GREENSchen Satz (ggf. bis auf das Vorzeichen) gleich

$$\begin{aligned} & \int_0^T f_1(v(t))\dot{v}_2(t) - f_2(v(t))\dot{v}_1(t) \, dt \\ &= \int_0^T f_1(v(t))f_2(v(t)) - f_2(v(t))f_1(v(t)) \, dt = 0; \quad \text{Widerspruch.} \quad \square \end{aligned}$$

**(2.11) Bemerkung.** Gibt es eine nullstellenfreie  $C^1$ -Abbildung  $\varrho : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $\operatorname{div}(\varrho f)(x) \leq 0$  für alle  $x \in U^*$ , so gilt dieselbe Aussage, denn  $\dot{x} = \varrho(x)f(x)$  und  $\dot{x} = f(x)$  haben nach Kapitel IV, Lemma (1.5) die gleichen Bahnen auf  $U^*$ .

**(2.12) Beispiel.** Chemostat mit verschiedenen Abflussraten.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - \frac{ax_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{bx_1}{c+x_1} \cdot x_2 - \delta_2 x_2 \quad (\text{kurz } \dot{x} = f(x); a, b, c, r, \delta_1, \delta_2 \text{ positive Konstanten}) \end{aligned}$$

Der offene positive Quadrant  $U$  ist positiv invariant (und auch die interessante Menge); weiter ist auf  $U$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{x_2} f \right) (x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{r}{x_2} - \frac{ax_1}{c+x_1} - \frac{\delta_1 x_1}{x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{bx_1}{c+x_1} - \delta_2 \right) \\ &= -\frac{ac}{(c+x_1)^2} - \frac{\delta_1}{x_2} < 0. \end{aligned}$$

Also gibt es in  $U$  keine geschlossene Lösungsbahn.

(Für  $\delta_1 = \delta_2$  lässt sich das direkt aus Kapitel IV, Beispiel (1.3) ersehen.)

Für  $\varphi(x) = x_1 + \frac{a}{b} x_2$  ist

$$\begin{aligned} L_f(\varphi)(x) &= r - \delta_1 x_1 - \delta_2 \frac{a}{b} x_2, \quad \text{also} \\ L_f(\varphi)(x) &\leq r - \vartheta \varphi(x), \quad \text{wo } \vartheta := \min(\delta_1, \delta_2), \end{aligned}$$

und somit liegen alle Lösungen, die in  $U$  starten, für hinreichend große Zeiten im Kompaktum  $K = \{x \in \bar{U}; \varphi(x) \leq \frac{2r}{\delta}\}$ ; vergleiche Kapitel IV, Satz (2.7) und (4.6).

Für  $y \in U$  ist also  $\omega(y) \neq \emptyset$ , und mit POINCARÉ-BENDIXSON muss  $\omega(y)$  einen stationären Punkt enthalten.

In  $\bar{U}$  existiert stets der stationäre Punkt  $w = \left(\frac{r}{\delta_1}, 0\right)$  mit

$$Df(w) = \begin{pmatrix} -\delta_1 & * \\ 0 & \frac{rb}{c\delta_1+r} - \delta_2 \end{pmatrix},$$

welcher für  $\frac{rb}{c\delta_1+r} < \delta_2$  (lokal) asymptotisch stabil ist.

Nachrechnen (wie in Kapitel IV, (5.13)) zeigt, dass in diesem Fall  $w$  der einzige stationäre Punkt in  $\bar{U}$  ist.

Für jedes  $y \in U$  gilt also  $w \in \omega(y)$ , und Kapitel IV, Lemma (5.4) zeigt schließlich  $\omega(y) = \{w\}$ .

Für  $\frac{rb}{c\delta_1+r} > \delta_2$  lässt sich analog zu Kapitel IV (5.13) b) zeigen, dass in  $U$  ein weiterer stationärer Punkt  $z$  existiert, der lokal asymptotisch stabil ist. Mit Kapitel IV (5.4) und (6.13) ergibt sich dann  $\omega(y) = \{z\}$  für alle  $y \in U$ .

### Anmerkungen zu Kapitel V

Eine sehr ausführliche Darstellung der lokalen und globalen Theorie ebener autonomer Gleichungen, welche die ersten Schritte des vorliegenden Skripts weiterführt, findet sich in ARTÉS, DUMORTIER und LLIBRE.



# Anhang A

## A.1 Normierte Vektorräume (Erinnerung)

▷ **Definition.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  heißt *Norm auf  $V$* , wenn gilt:

(i)  $\|x\| \geq 0$  für alle  $x \in V$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

(ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für alle  $x \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in V$ .

(Analog definiert man normierte  $\mathbb{C}$ -Vektorräume.)

▷ Beispiele für normierte Vektorräume:

(a)  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  mit  $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ;

(b)  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  mit  $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ ;

(c)  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  mit  $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

(d) Es sei  $[a, b]$  ein nicht entartetes kompaktes Intervall,  $C([a, b])$  der Vektorraum aller stetigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist durch

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)|; a \leq x \leq b\}$$

eine Norm auf  $C([a, b])$  definiert.

(e) Auch durch

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

ist eine Norm auf  $C([a, b])$  definiert.

▷ Abstand, Konvergenz:

Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, so nennt man  $d(x, y) := \|x - y\|$  den *Abstand* von  $x, y \in V$ . Für  $r > 0$ ,  $a \in V$ , nennt man

$$K_r(a) := \{x \in V; \|x - a\| < r\}$$

die *offene Kugel* mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r$ .

Ist  $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $V$ , so nennt man diese *konvergent* mit Grenzwert  $y \in V$ , wenn zu

jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $\|y_l - y\| < \varepsilon$  für alle  $l \geq N$ . Bezeichnung:  $y = \lim_{l \rightarrow \infty} y_l$ .

Man nennt  $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$  eine CAUCHY-Folge, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$\|y_l - y_k\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l \geq N.$$

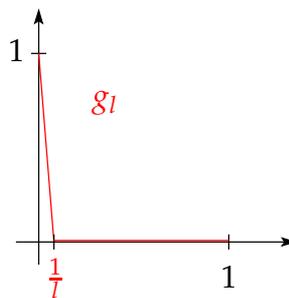
Man nennt  $(V, \|\cdot\|)$  *vollständig*, wenn jede CAUCHY-Folge in  $V$  konvergiert.

▷ Beispiele, weitergeführt.

(a)(b)(c)  $\mathbb{R}^n$  mit den angegebenen Normen ist jeweils vollständig. Zudem sind die drei Normen (wie alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$ ) *äquivalent*; d. h. eine Folge  $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$  konvergiert bezüglich einer Norm genau dann, wenn sie bezüglich der anderen konvergiert.

(d)  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  ist vollständig.  
(Stichwort: Gleichmäßige Konvergenz)

(e)  $(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$  ist nicht vollständig.  
Stichwort:



Offene und abgeschlossene Mengen:  
Sei  $(V, \|\cdot\|)$  normierter Vektorraum.

Eine Teilmenge  $M$  von  $V$  heißt *offen*, wenn es zu jedem  $y \in M$  ein  $\rho > 0$  gibt, so dass  $K_\rho(y) \subset M$ .

Eine Teilmenge  $N$  von  $V$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $V \setminus N$  offen ist. Äquivalente Charakterisierung der Abgeschlossenheit: Für jede Folge  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $N$ , die in  $V$  konvergiert, gilt schon  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in N$ .

Abschluss und Inneres (offener Kern): Ist  $Y \subset V$ , so gibt es eine größte offene Menge  $\overset{\circ}{Y} \subset Y$  (das *Innere* oder der *offene Kern* von  $Y$ ) sowie eine kleinste abgeschlossene Menge  $\overline{Y} \supset Y$  (der *Abschluss* von  $Y$ ).

Standardbeispiele: In jedem normierten Vektorraum  $V$  ist  $K_r(a)$  ( $a \in V, r > 0$ ) offen und

$$\{x \in V; \|x - a\| \leq r\} = \overline{K_r(a)}$$

abgeschlossen.

## A.2 Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen

- ▷ Stetigkeit: Es seien  $(V, \|\cdot\|)$  und  $(W, \|\cdot\|')$  normierte Vektorräume, weiter  $D \subset V$  nicht-leer und  $g : D \rightarrow W$  eine Abbildung.

Die Abbildung  $g$  heißt *stetig in*  $x_0 \in D$ , wenn gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass aus  $x \in D$ ,  $\|x - x_0\| < \delta$  stets  $\|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon$  folgt. Man nennt  $g$  *stetig auf*  $D$ , wenn  $g$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

Kriterium: Die Abbildung  $g$  ist stetig auf  $D$  genau dann, wenn gilt: Für jede offene Menge  $\tilde{U} \subset W$  existiert eine offene Menge  $U \subset V$  derart, dass  $g^{-1}(\tilde{U}) = U \cap D$ .

- ▷ LIPSCHITZ-Stetigkeit: Es seien  $(V, \|\cdot\|)$  und  $(W, \|\cdot\|')$  normierte Vektorräume,  $D \subset V$  nicht-leer und  $g : D \rightarrow W$ . Man nennt  $g$  *LIPSCHITZ-stetig* auf  $D$ , wenn es ein  $L > 0$  gibt, so dass

$$\|g(x) - g(y)\|' \leq L \cdot \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in D$ . LIPSCHITZ-stetige Abbildungen sind immer stetig; die Umkehrung gilt nicht unbedingt.

- ▷ Kontraktionen:

Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  normierter Vektorraum,  $D \subset V$  nicht-leer und  $h : D \rightarrow D$  eine Abbildung. Wenn es ein  $q < 1$  gibt derart, dass

$$\|h(x) - h(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in D$ , dann heißt  $h$  *Kontraktion*.

**BANACHScher Fixpunktsatz:** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  vollständig und  $D$  abgeschlossen. Dann besitzt jede Kontraktion  $h : D \rightarrow D$  genau einen Fixpunkt  $x$  in  $D$ . Man erhält  $x$  als Grenzwert der rekursiv definierten Folge:

$$x_0 \in D \text{ beliebig,} \quad x_{l+1} = h(x_l).$$

## A.3 Kompaktheit

Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Eine Teilmenge  $A$  von  $V$  heißt *kompakt*, wenn jede Folge  $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$  in  $A$  eine in  $A$  konvergente Teilfolge besitzt.

Äquivalente Charakterisierung:  $A$  ist genau dann kompakt, wenn gilt: Jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Eigenschaften kompakter Mengen: Ist  $A \subset V$  kompakt, so ist  $A$  abgeschlossen und beschränkt. Im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  (allgemeiner:  $\dim V < \infty$ ) ist dies eine äquivalente Charakterisierung, im Fall  $\dim V = \infty$  nie.

Verhalten unter stetigen Abbildungen:

Ist  $A \subset V$  kompakt, weiter  $(W, \|\cdot\|')$  normierter Vektorraum und  $f : A \rightarrow W$  stetig, so ist auch  $f(A)$  kompakt. Ist insbesondere  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $g$  auf  $A$  Maximum und Minimum an.



#### A.4 Zusammenhang

Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.

Eine Teilmenge  $A$  von  $V$  heißt *unzusammenhängend*, wenn gilt: Es gibt offene, nichtleere  $U_1, U_2 \subset V$ , so dass  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ,  $A \not\subset U_1$ ,  $A \not\subset U_2$  und  $A \subset U_1 \cup U_2$ . Andernfalls heißt  $A$  *zusammenhängend*.

Beispiel: Die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind genau die Intervalle.

Wegzusammenhang: Eine Teilmenge  $A$  von  $V$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn gilt: Für alle  $a, b \in A$  gibt es eine stetige Abbildung

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow A \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = a \quad \text{und} \quad \varphi(1) = b.$$

Wegzusammenhängende Mengen sind auch zusammenhängend; die Umkehrung gilt i. Allg. nicht.

Verhalten unter stetigen Abbildungen:

Ist  $A \subset V$  zusammenhängend, weiter  $(W, \|\cdot\|')$  normierter Vektorraum und  $f : A \rightarrow W$  stetig, so ist auch  $f(A)$  zusammenhängend.

# Anhang B

## Sätze aus anderen Gebieten der Mathematik

Es ist charakteristisch für die Theorie der Differentialgleichungen, dass dabei Ergebnisse aus anderen Teilgebieten der Mathematik herangezogen werden. (Man betrachte etwa in Kapitel II die Anwendungen der Linearen Algebra.)

Einige dieser Sätze führen wir hier auf und geben Quellen für ihren Beweis an.

### B.1 Der Fixpunktsatz von BROUWER

Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und konvex, und  $f : K \rightarrow K$  sei stetig. Dann gibt es ein  $y \in K$  mit  $f(y) = y$ . Dieselbe Aussage gilt auch, wenn  $K$  nur homöomorph zu einer kompakten und konvexen Menge ist; d.h. es gibt ein kompaktes und konvexes  $K^* \subset \mathbb{R}^n$  und eine bijektive Abbildung  $g : K \rightarrow K^*$ , so dass  $g$  und  $g^{-1}$  stetig sind.

Für einen Beweis siehe z. B. K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer 1985.

### B.2 Der JORDANSche Kurvensatz

wird in Kapitel V, Satz (1.1) ausführlich zitiert.

Einen Teil des Satzes wird ebenfalls in Deimling bewiesen; dort fehlt aber die für uns zentrale Aussage über den Rand. (Siehe Beweis zum Lemma über die BENDIXSON-Schnecke.) Ein Beweis der vollständigen Aussage ist zu finden in A. LEUTBECHER, *Vorlesungen zur Funktionentheorie II*, Skript, TU München 1991, sowie in J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press 1960.

### B.3 Der RIEMANNsche Abbildungssatz

Es sei  $V \subsetneq \mathbb{R}^2$  offen, nichtleer und einfach zusammenhängend. Dann ist  $V$  homöomorph zur Einheitskreisscheibe  $E = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ .

Ist  $V$  darüber hinaus die beschränkte Komponente des Komplements einer JORDAN-Kurve (also das Innere dieser Kurve), dann ist auch  $\bar{V}$  homöomorph zu  $\bar{E}$ .

Der erste Teil der Aussage wird u. a. im Skriptum zur Höheren Funktionentheorie von A.

Krieg bewiesen. Der zweite Teil (welcher durchaus relevant ist) findet sich im oben angegebenen Skript von LEUTBECHER, oder in DIEUDONNÉ, oder in C. CARATHEODORY, Funktionentheorie II, Birkhäuser 1961.

Für uns ist der Satz u. a. von Interesse, weil mit dem BROUWERSchen Fixpunktsatz dann Satz (2.9) aus Kapitel V folgt.

#### B.4 Die GREENSche Formel

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Weiter sei  $A \subset U$  kompakt mit glattem Rand  $\partial A = B_1 \cup \dots \cup B_r$  (dabei ist jedes  $B_i$  die Spur einer glatten, geschlossenen Kurve  $\gamma_i = \begin{pmatrix} \gamma_{i,1} \\ \gamma_{i,2} \end{pmatrix}$  passender Orientierung).

Dann ist

$$\int_A \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^r \int f_1(\gamma_i(t)) \dot{\gamma}_{i,2}(t) - f_2(\gamma_i(t)) \dot{\gamma}_{i,1}(t) dt.$$

Wir benötigen diese Aussage im Beweis des BENDIXSON-Kriteriums (Kapitel V, Satz (2.10)).

# Anhang C

## Einige Lehrbücher und Monographien

C.1 H. Amann, Ordinary Differential Equations. De Gruyter, Boston, 1990.

*(Auch in Deutsch erhältlich, hat ja fast lörn sam Inklisch äniwäh. Behandelt auch weiterführende Themen, etwa Verallgemeinerungen auf unendlich dimensionale Räume.)*

C.2 J. Artés, F. Dumortier, J. Llibre, Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

*(Sehr umfassende und gründliche Darstellung der Theorie ebener Systeme. Ein Schwerpunkt liegt auf polynomiellen Systemen.)*

C.3 B. Aulbach, Gewöhnliche Differenzialgleichungen. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2. Auflage 2004.

*(Sehr schön, sorgfältig und ausführlich geschrieben. Geht von den Anfängen bis zur Verzweigungstheorie.)*

C.4 H. Cartan, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen. BI, Mannheim, 1968.

*(Enthält auch einen Abschnitt zu Differentialgleichungen.)*

C.5 C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications. Springer-Verlag, New York, 2<sup>nd</sup> ed. 2006.

*(Ausführliche, weit führende Einführung in die Theorie; zahlreiche interessante Beispiele.)*

C.6 P. Hartman, Ordinary Differential Equations. SIAM, Philadelphia, 2002.

*(Klassische Monographie; Sätze werden in allgemeiner Version - nicht spezialisiert - vorgestellt und bewiesen.)*

C.7 K. Meyberg, P. Vachenauer, Höhere Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage 2007.

*(Klassisches Lehrbuch. Geschrieben vor allem für Ingenieure und Naturwissenschaftler; wegen der schönen Anwendungsbeispiele und Aufgaben auch für Mathematiker lesenswert.)*

C.8 L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, third edition 2001.

*(Einführung in wichtige Themen, vor allem für autonome Gleichungen; relativ elementar. Ausführliche Behandlung der globalen Theorie, inklusive POINCARÉ-BENDIXSON. Nicht alle Aussagen sind komplett bewiesen.)*

C.9 W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin, 7. Auflage 2006.

*(Klassisches Lehrbuch, sehr elegante und klare Beweise. Enthält auch viel Wissenswertes zu Randwertproblemen.)*





# Index

- Abhängigkeit,
  - stetige, 73, 117
- Abhängigkeitssatz, 73, 75
- abstoßend, 114
- Änderungsrate, 3
- affiner Unterraum, 44
- Alpha-Limespunkt, 102
- analytisch, 35, 67
- Anfangswert, 85
- Anfangswertproblem, 6, 8, 22, 38, 42, 52, 75
- asymptotisch stabil, 113
- Attraktor, 113
- autonom, 6, 29
- autonome Differentialgleichung, 30
- autonome Gleichung, 85
  
- BANACHScher Fixpunktsatz, 21, 23, 39
- Begleitmatrix, 60
- Begradigungssatz, 87
- BENDIXSON, 119
  - Schnecke, 123
  - Kriterium, 128
- BERNOULLISCHE Differentialgleichung, 17
- BESSELSche Differentialgleichung, 70
- Bilanzgleichung, 4
- binomische Formel, 51
- BUTLER und MCGEHEE, 117
  
- CAUCHY
  - Folge, 26
  - Produkt, 34, 68
  - SCHWARZsche Ungleichung, 50
- $C^1$ -Abhängigkeit, 80
- $C^1$ -Funktion, 80
- charakteristisches Polynom, 56, 60
- Chemostat, 97, 106, 112, 118, 128
  - Gleichung, 86, 93
- CHETAEV, 108
  
- diagonalisierbar, 46, 49, 64
- Differentialgleichung
  - BERNOULLISCHE, 17
  - BESSELSche, 70
  - EULERSche, 69
  - autonome, 30, 78
  - homogene, 18
  - homogene lineare, 14
  - inhomogene lineare, 15
- Differentialgleichung, gewöhnliche,
  - $n$ -ter Ordnung, 8
  - erster Ordnung, 6
- Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung,
  - homogene lineare, 58
  - inhomogene lineare, 58
  - lineare, 58
- Differentialgleichungssystem,
  - homogenes lineares, 41
  - inhomogenes lineares, 41
- Differential- und Integralrechnung,
  - Hauptsatz der, 21
- Differential-Ungleichung, 77
- Differenzierbare Abhängigkeit von Parametern, 83
- DINI-Derivierte, linksseitige obere, 73
- Doppelreihe, 34
  
- Eigenraum, 115
- Eigenvektor, 46, 49, 64
- Eigenwert, 56, 64, 100, 109
- Eindeutigkeitssatz, 25
- erstes Integral, 90
- EULER, 39
  - Gleichung, 94
  - sche Differentialgleichung, 69
- Existenzintervall, 13, 29, 33
- Exponentialfunktion, 51
- Exponentialreihe, 50
  
- Fadenpendel, 91, 95, 105, 107
- Federkonstante, 63
- Fixpunkt, 23



- Fixpunktsatz,  
     BANACHScher, 21, 23, 39  
     BROUWERScher, 79, 100  
 Fortsetzbarkeit von Lösungen, 26  
 Fundamentalmatrix, 43, 48, 52, 61  
 Fundamentalsystem, 54  
  
 Geschwindigkeit, 3  
 Gradientensystem, 105  
 Gravitationsfeld, 4  
 GRONWALL, 77  
  
 Halbgruppeneigenschaft, 32, 102  
 Halbtrajektorie, 92, 107  
 Hauptachsentransformation, 66  
 HOOKE, 63  
 HURWITZ, 112  
  
 Indexgleichung, 69  
 Integral,  
     parameterabhängiges, 81  
 Integralgleichung, 20, 81  
 invariant, 92, 103  
 Invariante, 90  
 Isomorphismus, 42, 59, 65  
  
 JORDAN  
     -Block, 111  
     -Kästchen, 54, 60  
     -Normalform, 49, 55  
     scher Kurvensatz, 119, 123  
  
 Koeffizientenvergleich, 34  
 Kompartiment, 98  
     -matrix, 98  
     -system,  
         lineares, 98  
 Konjugation, 49  
 Kontraktion, 23  
 Konvergenzgebiet, 35  
 Koordinatentransformation, 86  
     affine, 87  
 Kreuzungslemma, 121  
 KRONECKER-Symbol, 88  
  
 LAPLACE, 48  
 LASALLE, 105, 107  
 Lemma,  
     GRONWALLSches, 82, 110  
 LIE-Ableitung, 90  
 Limesmenge, 101  
 Limespunkt, 102, 115  
 linear, 41  
 Lineare Algebra, 41  
 LIPSCHITZ  
     -Bedingung, 21, 23, 29, 74, 78  
     -Konstante, 21, 74, 82  
 LJAPUNOV, 110  
     -Funktion, 90, 107, 109  
 Lösung, 6  
     partikuläre, 12  
 Lösungsbahn, 29, 32, 102  
     geschlossene, 32, 126  
 Lösungsbasis, 43, 46, 60  
 lösungserhaltend, 86  
 logistisches Wachstum, 32  
 lokaler Fluss, 29, 78, 85  
  
 Matrix,  
     irreduzibel, 99  
     nichtnegativ, 99  
     reduzibel, 99  
 Matrix-Exponentialfunktion, 50  
 Maximumsnorm, 20  
 Menge,  
     attraktiv, 113  
     invariant, 91  
     negativ invariant, 92  
     positiv invariant, 92  
     wegzusammenhängend, 120  
     zusammenhängend, 120  
 Mittelwertsatz, 4  
 Monotoniesatz, 125  
  
 NEWTON, 4, 9, 64  
 Niveaumenge, 90  
 Norm, 81  
  
 obere Dreiecksgestalt, 55  
 Ökologie, 98  
 Ökotoxikologie, 98  
 Omega-Limespunkt, 102  
 Operator, 20, 23  
 orbitale Ableitung, 90  
 Orthant, 96, 100

- Partialbruchzerlegung, 14  
partikuläre Lösung, 12, 44, 58, 59  
PEANO  
  Satz von, 29  
Permutation, 48  
Physiologie, 98  
POINCARÉ, 119  
  -Abbildung, 122  
Polarkoordinaten, 87  
Polynom,  
  charakteristisches, 60  
Population, 32  
positiv definit, 65  
Potenzreihe, 35  
Potenzreihenansatz, 33  
Potenzreihenentwicklung, 33, 67  
  
Realteil, 56, 100, 109  
Reduktionssatz, 9, 58  
Reihe  
  geometrische, 35  
  majorisierende, 35, 38  
Rekursion, 68  
Rekursionsschema, 34  
Repellor, 114  
Resonanzkatastrophe, 63  
RIEMANNscher Abbildungssatz, 127  
ROUTH, 112  
Rückkehrabbildung, 122, 123  
  
Satz  
  von BOLZANO-WEIERSTRASS, 103  
  von PEANO, 29  
  von PERRON und FROBENIUS, 100  
  von PICARD-LINDELÖF, 22  
  von POINCARÉ und BENDIXSON, 126  
  von der stabilen und instabilen Man-  
  nigfaltigkeit, 115  
  über die stetige Abhängigkeit, 75  
  über die Umkehrfunktion, 88  
Semiinvariante, 90, 93  
Separation der Variablen, 11, 28  
spezielle Lösung, 59  
stationärer Punkt, 29, 88, 106, 114  
  asymptotisch stabil, 106  
  instabil, 106  
  stabil, 106  
  
Stetige Abhängigkeit von Anfangswert und  
  Parametern, 76  
STOKES, 5, 9  
synchron, 66  
System von Differentialgleichungen, 6, 9  
  
TAYLOR-Entwicklung, 111  
Trajektorie, 29, 92  
Transversale, 120, 123  
  
Umordnungssatz, 34  
Untermannigfaltigkeit, 95, 97  
Unterraum,  
  instabil, 115  
  stabil, 115  
  
Variation der Konstanten, 15, 44, 61, 110  
Vektorfeld, 85  
Vektorraum, 20, 42, 59, 64  
Vielfachheit, 57  
VOLTERRA - LOTKA, 90  
  
wegzusammenhängend, 120  
WRONSKI-Determinante, 48  
  
Zeitskalierung, 88  
zusammenhängend, 103, 120  
Zusammenhangskomponente, 119, 123  
Zusammensetzen von Lösungen, 25