Eine Kachelung der oberen Halbebene $\mathbb{H}$

Die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ vermöge

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (M,\tau) &\longmapsto M\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \qquad M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Da $-E$ trivial operiert, induziert das eine Operation der projektiven linearen Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ auf $\mathbb{H}$. Der Fundamentalbereich

$$\mathcal{F} := \left\{\tau \in \mathbb{H}; -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\tau \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1\right\}$$

enthält ein Vertretersystem der Bahnen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\tau$, $\tau \in \mathbb{H}$. Insbesondere hat $\mathcal{F}$ die folgenden Eigenschaften:

a) Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ gibt es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\tau \in \mathcal{F}$.

b) Gehören τ und $M\tau$, $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, zum offenen Kern von $\mathcal{F}$, so gilt $M = \pm E$.

c) $\mathcal{F}$ ist zusammenhängend und relativ abgeschlossen.

Aus $M\mathcal{F} = (-M)\mathcal{F}$ ergibt sich die Kachelung

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} M\mathcal{F}$$

mit Überschneidungen nur auf den Rändern.

Um diese Kachelung nun mit 2 Farben zu realisieren, benutzt man, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Dabei operiert T als Translation $\tau \mapsto \tau + 1$ und J als Inversion $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$. (Im Poster wurde die Abkürzung $U = -TJ = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ verwendet.) Dann ergibt sich die Färbung des Posters folgendermaßen:

Multipliziert man einen gegebenen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_1$ der Farbe $f \in \{-1, 1\}$ mit $M \in \{J, T\}$, so besitzt $M\mathcal{F}_1$ die Farbe $-f$.

Bemerkungen:

a) Die Vereinigung der beschrifteten Kacheln ist ein Fundamentalbereich für die Hauptkongruenzgruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})[3] := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); M \equiv E \bmod 3\}.$$

b) Alle Fundamentalbereiche haben denselben hyperbolischen Flächeninhalt bezüglich des Volumenelements $y^{-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (wobei x der Realteil und y der Imaginärteil von τ sind).

c) Man kann $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ als freies Produkt der zyklischen Gruppe $\langle J \bmod \pm E\rangle$ der Ordnung 2 und der zyklischen Gruppe $\langle U \bmod \pm E\rangle$ der Ordnung 3 darstellen. Deswegen ist obige Färbung wohldefiniert.

d) Auf ähnliche Weise lässt sich eine 6-Färbung erreichen:

   Multipliziert man einen gegebenen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_1$ der Farbe $f \in \mathbb{C}, f^6 = 1$ mit $M = J$ bzw. $M = T$, so besitzt $M\mathcal{F}_1$ die Farbe $-f$ bzw. $e^{\pi i/3} f$.

e) Bei weiterem Interesse empfiehlt sich der Besuch der Vorlesungen Höhere Funktionentheorie bzw. Siegelsche Modulformen und die Lektüre entsprechender Bücher der Funktionentheorie/Zahlentheorie, wie z.B. Koecher, Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen.

f) Das Poster ist auf der Webseite des Lehrstuhls (www.mathA.rwth-aachen.de) erhältlich.