

Ein Kanon für den Geometrieunterricht in den Sekundarstufen

Leitmotive:

- innermathematischer Beziehungsreichtum
- Herausforderung des heuristischen und analytischen Denkens
- Bedeutung in Alltag, Wissenschaften, allgemeiner Kultur
- ästhetische und historische Aspekte

Kreisformen

Schmuckformen • Spiegel- und Drehsymmetrie • Doppelkreis und Grundkonstruktionen • Winkel und Sehne • Satz des Thales und Umkehrung • Umfangswinkelsatz und Umkehrung • Sehendreiecke • Sehnenvierecke

Kreisvermessung

Empirische Methoden • Approximation des Kreisflächeninhalts über reguläre Sehnen- und Tangentenpolygone (Archimedes) • alternative Wege, bes. über Rechtecke und Trapeze • Zusammenhang Flächeninhalt - Umfang (Kepler), Massigkeit von Flächen (als Quotient Flächeninhalt : Umfang) • isometrisches Problem der Ebene • Berechnung von Kreisteilen • Kulturgeschichte der Zahl π

Dreiecke

Sätze über Mittellinien, Seitenmittendreieck, Seitenhalbierende (Schwerpunkt), über Höhen, Mittelsenkrechte und Höhenfußpunkttriade, über Winkelhalbierende (Inkreis) und Teilung der Gegenseite durch Winkelhalbierende • Sätze von Ceva und Menelaos • Sätze über Eulersche Gerade und Feuerbachschen Neunpunktekreis

Gewöhnliche Zyklode

Kinematische Erzeugung: Gleitfreies Rollen eines Kreises auf einer Geraden als Superposition von Translation und Rotation • punktweise Konstruktion, Symmetrien • Parameterdarstellung, trigonometrische Funktionen • Tangenten- und Normalenbestimmung, Quadratur und Rektifikation geometrisch und analytisch • Krümmung, Evolute • Bedeutung in der Physik (Tautochronie, Brachystochronie) • Verallgemeinerungen, v.a. Hypo- und Epizykloiden und deren Bedeutung in Wissenschaft, Technik und Kunst

Parallelität, Längen- und Flächenberechnung

Parallelstreifen und seine (Kongruenz-) Symmetrien • Streifenornamente • Flächeninhalt von Rechteck, Parallelogramm, Dreieck, Trapez, ebene Scherungen • Streifengitter, Teilung von Strecken in gleichlange Teilstrecken, Bruchrechnung • Proportionalität und Ähnlichkeit von Dreiecken • Streifensätze und Strahlensätze • Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken

Kugel

Symmetrien der Kugel, insbes. Ebenenspiegelungen • Darstellung in orthogonalen Rissen (und Kavalierperspektive) • Ebene Schnitte, Großkreise und Kleinkreise • Großkreise als geodätische Linien • Kugelzweiecke und -dreiecke • Koordinaten der (Erd-)Kugel, Längen- und Breitenkreise • mathematische Geographie • Entfernungs- und Kursbestimmungen • Loxodrome • Bedeutung der Kugel in Kosmologie, Astronomie, lebender Natur, Technik, Sport, Kunst und Alltag

Reguläres Fünfeck

Herstellen aus einem Streifen Papier • Konstruktion (bei vorgegebenem Umkreisradius) • Symmetrien • eingeschriebenes Diagonalenpentagramm • auffällige Teilfiguren, ähnliche Dreiecke • Inkommensurabilität von Diagonale und Seite, Wechselwegnahme und Kettenbruchentwicklung, Näherungsbrüche, Fibonacci-Zahlen • Goldener Schnitt, Goldenes Rechteck mit Goldener Spirale (angenähert aus Kreisbögen) • Logarithmische Spirale

Archimedische Spirale

Kinematische Erzeugung: Superposition zweier Bewegungen • Polarkoordinaten, Tangentenkonstruktion und Quadratur (geometrisch und analytisch) • Leibnizsche Sektorenregel • Krümmung; Bogenlänge analytisch • Zylinder und zugehörige Kegelschraubenlinie • Archimedische Spirale als Normalriß einer Kegelschraubenlinie (Pappos) • (Archimedische) Spiralen und Schraubenlinien in Alltag, Technik und Kunst

Rechtwinklige Dreiecke

Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat gleichen Inhalts • Satzgruppe des Pythagoras, verschiedene Beweise, u.a. Ähnlichkeitsbeweis • Flächen- und Längenbestimmung, geometrisches Wurzelziehen • Verallgemeinerungen, Cosinussatz, Skalarprodukt • Teilbarkeitslehre im Quadratgitter, Pythagoreische Dreiecke • Anwendungen in Alltagssituationen • Geistesgeschichtliches

Vermessung der Kugel

Reale und ideale Wägeprozesse zur Volumenbestimmung, Exhaustion (Archimedes) • Volumenbestimmung via Satz Cavalieri • Alternative Wege • Zusammenhang Oberflächeninhalt - Volumen • Oberflächeninhalt-Volumen-Funktion • Schalenaufbau • Berechnung von Teilen der Kugel • Isoperimetrie im Raum • Massigkeit von Körpern (als Quotient Volumen : Oberflächeninhalt) und ihre Bedeutung in Natur und Technik

Zentralperspektive

Zentralperspektive aus orthogonalem Grund- und Aufriß • Invarianten der Zentralprojektion • projektive Abbildungen und wichtige Unterfälle (affine, Ähnlichkeits- und Kongruenzabbildungen) • Satz von Desargues • Skalen • Beziehungen zur Technik, Optik und Kunstgeschichte

Kettenlinie

Genese der analytischen Darstellung der Kettenlinie als Modell einer an zwei Punkten hängenden, biegsamen, homogenen und nur der Schwerkraft unterworfenen Kette • Differentialgleichung • Zusammenhang mit Exponentialfunktion, Grenzwertverhalten • Hyperbel- und Arealfunktionen • Tangentenkonstruktion • Quadratur, Rektifikation, Krümmung • Anwendung in Alltag, Natur und Technik • Traktrix als Evolute der Kettenlinie • Parameterdarstellung der Traktrix • Fläche erzeugt aus der Traktrix bei Rotation um dieselbe x-Achse (Minimalfläche) • Fläche erzeugt aus der Traktrix bei Rotation um dieselbe x-Achse (Fläche konstanter negativer Krümmung, Antikugel)

Polyeder

Darstellung von Polyedern in orthogonalen Rissen und in (affinen) Schrägbildern • Volumenbestimmung von Prismen und Pyramiden • Satz von Cavalieri, räumliche Scherung • Reguläre (platonische) Polyeder, Symmetrien, Verwandtschaften, Berechnungen • Eulerscher Polyedersatz • Proben aus der Kristallographie • Geistesgeschichtliches zu den Platonischen Körpern

Ähnlichkeit und Kreis

Sekanten-Tangenten-Satz • Sehensatz • flächeninhaltsstreu Rechteckverwandlungen • mittlere Proportionale, Potenzsatz • Konstruktion gemeinsamer Tangenten an zwei Kreise, inneres und äußeres Ähnlichkeitszentrum, Satz über die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten, harmonische Teilung, harmonische Punktquadripel • Technische Anwendungen • Kreis des Apollonius • Satz des Ptolemäus über Sehnenvierecke, Anwendung für Trigonometrie: Additionstheorem für sin • isopometrischer Satz für Gelenkvierecke

Kegelschnitte

Genese als ebene Schnitte durch einen Doppelkegel • Darstellung in orthogonaler Mehr-Tafel-Projektion (und in Schrägbildern) • Symmetrien • Affinitäten • Brennpunkteigenschaften (Dandelinische Kugeln) • Analytische Darstellung (Gleichungen) und weitere Eigenschaften (lineare und numerische Exzentrizität, Tangentenbestimmung, Pole, Krümmungsverhalten) • Leitlinieneigenschaft und Leitkreiseigenschaft • Verwandtschaften und Metamorphosen • Einblick in projektive Eigenschaften (Sätze von Pascal und Brianchon) • Bedeutung der Kegelschnitte in Alltag, Wissenschaft (z.B. Astronomie) und Kunst (Dürer)

Sattelfläche (Hyperbolisches Paraboloid / HP)

Erzeugung aus Geradenscharen, HP als geometrischer Ort der Punkte, die gleichen Abstand von zwei zueinander windschiefen Geraden haben (Modell am Würfel) • HP als Regelfläche, die aber nicht abwickelbar ist • vektorielle und analytische Darstellungen und Beschreibungen, Symmetrien • Schnitte mit Geraden und Ebenen • Krümmung • Erzeugung aus Parabeln, HP als Schiebefläche • Anwendung von HP-Flächen in der Architektur • Überblick über Flächen zweiter Ordnung