Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 03. April 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 1

Abgabe bis Dienstag, den 10.04.2007, 13:15 Uhr (auch in der Vorlesung möglich)

Aufgabe 1 (4+3+2+2+3+3 Punkte)

Ist V ein K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) und $N : V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so heißt N *Norm* (und V zusammen mit N *normierter Vektorraum*), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(N1) $N(0) = 0$ und $N(v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$. (Definitheit)
(N2) $N(sv) = |s|N(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$. (Homogenität)
(N3) $N(v + w) \leqslant N(v) + N(w)$ für alle $v, w \in V$. (Dreiecksungleichung)

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und V der Vektorraum der beschränkten stetigen Funktionen auf D, so ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^0} : V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_{C^0} := \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

eine Norm auf V und wird als *Supremumsnorm* bezeichnet. Analog definiert man für $n \in \mathbb{N}$ auf dem Vektorraum V_n der n-mal stetig und beschränkt differenzierbaren Funktionen auf D die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^n} : V_n \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_{C^n} := \sup\{|f^{(m)}(x)| \mid 0 \leqslant m \leqslant n,\ x \in D\}.$$

Ist X eine nichtleere Menge und $M : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so heißt M *Metrik* (und X zusammen mit M *metrischer Raum*), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M1) $M(x, x) = 0$ für alle $x \in X$.
(M2) $M(x, y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. (zusammen mit (M1): Definitheit)
(M3) $M(x, y) = M(y, x)$ für alle $x, y \in X$. (Symmetrie)
(M4) $M(x, z) \leqslant M(x, y) + M(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$. (Dreiecksungleichung)

Ist X ein Raum mit Metrik M und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyfolge* in X, wenn gilt

$$\lim_{\min\{m,n\}\to\infty} M(x_m, x_n) = 0.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* in X, wenn es ein $x \in X$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x) = 0.$$

Das x heißt dann *Grenzwert* der Folge.

Grenzwerte von Folgen sind, sofern sie existieren, eindeutig. Konvergente Folgen sind stets Cauchyfolgen, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Indem man zu einer Norm N durch $(x, y) \mapsto N(x - y)$ eine Metrik definiert, erhält man die gleichen Begriffe auch für normierte Vektorräume.

a) Sei $V = C^0([0, 1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Betrachte

$$N : V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \inf\{\|g\|_{C^0} \mid g \in V \text{ differenzierbar mit } g' = f\}.$$

Welche Normeigenschaften erfüllt N?

b) Welche Normeigenschaften erfüllt $\|\cdot\|_{C^n}$ für $n \in \mathbb{N}$?

c) Sei $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^x$. Berechnen Sie $\|f\|_{C^n}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere die Funktion $f_{a,b} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Berechnen Sie $\|f_{a,b}\|_{C^1}$ in Abhängigkeit von a und b.

e) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$M_{a,b} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ a(x - y)^2 + b, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $M_{a,b}$ eine Metrik?

f) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$. Untersuchen Sie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^0}$ und $\|\cdot\|_{C^1}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so gilt

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(f^{-1}([t, \infty))) = 0.$$

Aufgabe 3 (2+3+2+2 Punkte)

Nach 1.1 der Vorlesung heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *periodisch*, wenn es ein $T \in \mathbb{R}$ mit $T > 0$ gibt, so dass $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das T heißt dann eine *Periode* von f. Die Menge aller Perioden einer Funktion f sei hier mit $\operatorname{Per} f$ bezeichnet.

a) Sei f stetig und periodisch. Zeigen Sie, dass f sogar gleichmäßig stetig ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist f stetig, periodisch und nichtkonstant, so ist $\operatorname{Per} f$ häufungspunktfrei.

c) Geben Sie (mit Beweis) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Per} f = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ an.

d) Beweisen oder widerlegen Sie: Sind f und g periodisch, so ist auch $f + g$ periodisch.