Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 10. April 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 2

Abgabe bis Dienstag, den 17.04.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar und $T > 0$, die Menge $N = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq f(x+T)\}$ habe Maß Null.

a) Zeigen Sie: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} : f(x) \neq f(x+kT)\}$ ist ebenfalls Nullmenge.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine meßbare, T-periodische Funktion g mit $g = f$ f. ü.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Seien X, Y Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$. Weiter sei $S : X \to Y$ eine lineare Abbildung, zu der ein $c > 0$ existiert mit $\|Sx\|_Y \leqslant c\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

a) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, so ist $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y.

b) Zeigen Sie: Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen den Grenzwert $x \in X$, so konvergiert $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen den Grenzwert Sx.

Aufgabe 3 (1+2+4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $p, q \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $n \leqslant m$ und $1 \leqslant q \leqslant p$.

a) Zeigen Sie für alle $f \in C^m_{2\pi}$, daß $f \in C^n_{2\pi}$ und $\|f\|_{C^m} \geqslant \|f\|_{C^n}$ gilt.

b) Zeigen Sie für alle $f \in C^n_{2\pi}$, daß $f \in L^p_{2\pi}$ und $\|f\|_{C^n} \geqslant \|f\|_p$ gilt.

c) Zeigen Sie für alle $f \in L^p_{2\pi}$, daß $f \in L^q_{2\pi}$ und $\|f\|_p \geqslant \|f\|_q$ gilt. (Hinweis: Höldersche Ungleichung verwenden)

Aufgabe 4 (4+1 Punkte)

Sei $\tilde{f} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\pi}x, & \text{falls } -\pi \leqslant x < 0, \\ 1 - \frac{1}{\pi}x, & \text{falls } 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$$

und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei die 2π-periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$.

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$ von f für alle $n \in \mathbb{Z}$.

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.