Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 17. April 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 3

Abgabe bis Dienstag, den 24.04.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für alle $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{[x_0, x_0+2\pi]} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \int_{[0,2\pi]} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}.$$

b) Sei $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) F ist 2π-periodisch.

(ii) Es gilt $\hat{f}(0) = 0$.

(iii) Es gilt $\int_{[0,2\pi]} f(x) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x) = 0$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

a) Sei $\tilde{f} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$. Berechnen Sie $\hat{f}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

b) Sei $\tilde{g} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\pi x + x^2}{2} & \text{für } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{\pi x - x^2}{2} & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung von $\tilde{g}$. Berechnen Sie $\hat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie $\hat{P}$ für jedes trigonometrische Polynom P.

b) Bestimmen Sie $\hat{D}_n$ und $\hat{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Berechnen Sie für $f \in L^1_{2\pi}$ und $n \in \mathbb{N}$ sowohl $S_n(f, \cdot)\hat{}$ als auch $\sigma_n(f, \cdot)\hat{}$.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Für $f, g \in L^1_{2\pi}$ definiere $f * g$ durch

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(t)g(x-t)\, \mathrm{d}\lambda(t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen das Integral existiert. ($f * g$ heißt das (periodische) *Faltungsprodukt* von f und g.)

a) Zeigen Sie, daß für $f, g \in L^1_{2\pi}$ stets $f * g \in L^1_{2\pi}$ gilt. Begründen Sie dabei auch, warum $f * g$ f. ü. in $\mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie den *Faltungssatz:* $(f * g)\hat{}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$ für alle $f, g \in L^1_{2\pi}$ und $k \in \mathbb{Z}$.