Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 24. April 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 4

Abgabe bis Mittwoch, den 02.05.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+2+2 Punkte)

Für alle $-\pi < x < \pi$ gilt

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Zeigen Sie damit die folgenden Gleichheiten.

a) $x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$ für alle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

b) $x^4 - 2\pi^2 x^2 = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos(nx) - \frac{7}{15}\pi^4$ für alle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

Aufgabe 2 (2+1+2+2 Punkte)

a) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 1$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so daß $(c_n n^r)_{n\in\mathbb{Z}}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

wohldefiniert ist und $f \in C^m_{2\pi}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < r - 1$ gilt.

b) Verwenden Sie die Aussage aus Teil (a), um für

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n^{13,2} + 2n^6 - 1}$$

ein möglichst großes $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f \in C^m_{2\pi}$ zu finden.

c) Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$. Weiter seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, für die $(a_n n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

wohldefiniert ist und $f \in C_{2\pi}^m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < r - 1$ gilt.

d) Welche Aussagen der Form $f \in C_{2\pi}^m$ beziehungsweise $g \in C_{2\pi}^k$ können mit Teil (c) für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n x)}{2^n}$$

hergeleitet werden?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion und $0 < \alpha < 1$. Die Funktion f heißt *Lipschitz-Funktion* mit Exponent α, wenn gilt:

$$\sup_{x,h\in\mathbb{R},\, h\neq 0} \frac{|f(x) - f(x-h)|}{|h|^\alpha} < \infty.$$

Zeigen Sie: Ist f Lipschitz-Funktion mit Exponent $0 < \alpha < 1$, so existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|\hat{f}(k)| \leqslant C|k|^{-\alpha}$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x - \tfrac{1}{k}\pi) e^{-ikx} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.