Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 08. Mai 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 6

Abgabe bis Dienstag, den 15.05.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Geben Sie (mit Beweis) explizit Funktionen $f_m \in L^2_{2\pi}$ an mit $\hat{f}_m(0) = 0$ und $|\hat{f}_m(n)| = |n|^{-m}$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m \in \{1,2,3,4\}$, und verwenden Sie diese in 2.12(d) zur Berechnung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

Hinweis: Orientieren Sie sich an den Funktionen auf den letzten Übungsblättern. Die dort gezeigten Fourierreihen dürfen hier natürlich ohne Beweis referenziert werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = f(\pi) = 0$. Zeigen Sie die sogenannte *Wirtinger-Ungleichung:*

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß f sich zu einem $g \in C^1_{2\pi}$ fortsetzen läßt mit $g(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-\pi, 0)$.

Aufgabe 3 (2+2+4 Punkte)

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe dürfen Sie verwenden, daß jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis hat (Folgerung aus dem Zornschen Lemma).

a) Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie, daß dann jedes $x \in H$ eine eindeutige Zerlegung
$$x = x_K + x_K^{\perp}$$
hat mit $x_K \in K$ und $x_K^{\perp} \perp y$ für alle $y \in K$. Hinweis: K ist ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt von H auf K einschränkt.

b) Sei H ein Hilbertraum und $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq H$ sowie $K = \overline{\operatorname{span}\{x_i \mid i \in I\}}$. Zeigen Sie, daß $K = H$ genau dann gilt, wenn für $f \in H$ mit $\langle f, x_i \rangle = 0$ für alle $i \in I$ stets $f = 0$ gelten muß.

c) Sei $g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für $\hat{g}$ dafür an, daß $\operatorname{span}\{T_t g \mid t \in \mathbb{R}\}$ dicht in $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ liegt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ reellwertig mit L^2-Ableitung $g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie $f \perp g$.