Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 15. Mai 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 7

Abgabe bis Dienstag, den 22.05.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sind $f, g \in L^2_{2\pi}$, so ist $h := f \cdot g \in L^1_{2\pi}$. Zeigen Sie

$$\hat{h}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(k-n)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die folgenden linearen Differentialgleichungen:

a) $y'(x) + 2y(x) = \cos(2x)$

b) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \sin(3x) + \cos x$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) H ist *separabel*, das heißt, es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge von H.

(ii) Jede Orthonormalbasis von H ist abzählbar.

(iii) H hat eine abzählbare Orthonormalbasis.

Wie auch in Ü6 A3 dürfen Sie die Existenz von Orthonormalbasen von Hilberträumen voraussetzen.

Aufgabe 4 (6+3 Punkte)

Sei $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung einer glatten überschneidungsfreien geschlossenen Kurve der Länge 2π, die über die Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt, für $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ gelte

(i) $x, y \in C^1([-\pi, \pi])$,

(ii) $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ und $\varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi)$,

(iii) $|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 = 1$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$.

Für den Flächeninhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt dann (bei Durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn)

$$A = -\int_{-\pi}^{\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Zeigen Sie

$$2 - \frac{2A}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(|n\hat{x}(n) - i\hat{y}(n)|^2 + |n\hat{y}(n) + i\hat{x}(n)|^2 + (n^2-1)(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2)\right).$$

b) Folgern Sie $A \leqslant \pi$, und zeigen Sie, daß $A = \pi$ nur dann gilt, wenn φ einen Kreis mit Radius 1 parametrisiert.