Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 22. Mai 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 8

Abgabe bis Dienstag, den 05.06.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Für $a > 0$ sei $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_a(x) = e^{-ax^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f_a * f_b$ für $a, b > 0$. Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

b) Für $t > 0$ sei $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $g_t * g_s = g_{s+t}$ für alle $t, s > 0$.

Bemerkung: Die Faltungsprodukte in dieser Aufgabe sind die nichtperiodischen Produkte aus 3.10.

Aufgabe 2 (3+3+5 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - \tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Sei $t > 0$. Benutzen Sie Teil (a) mit $f : x \mapsto e^{-tx^2}$, um

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-y-\frac{t^2}{y}}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

zu zeigen.

c) Setzen Sie in (b) $t = \frac{|x|}{2}$, um

$$(x \mapsto e^{-|x|})\hat{}(\xi) = \frac{4\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$ zu beweisen (dabei bezeichnet $|\cdot|$ wie in 3.1 die Euklidische 2-Norm auf $\mathbb{R}^2$ und Γ die Gamma-Funktion, definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

für alle $x > 0$). Hinweis: Verwenden Sie »Integration über Sphären«.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die n-te *Hermite-Funktion* $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} q^{(n)}(x), \qquad \text{wobei} \quad q(x) = e^{-x^2},$$

jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-x^2/2} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} P^{(n)}(x) e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

für alle Polynome $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Folgern Sie, daß $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\tilde{h}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} h_n(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ ist.