LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 05. Juni 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 9

Abgabe bis Mittwoch, den 13.06.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (5+3+4 Punkte)

Es seien $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

a) Zeigen Sie: $f * g$ ist stetig, und im Falle $p, q < \infty$ gilt $(f * g)(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-meßbar mit $\lambda(A) > 0$. Zeigen Sie: $A - A = \{a - b \mid a, b \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Umgebung der Null.

c) Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung von (b), also die Aussage, daß jede Borel-meßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, für die $A - A$ eine Umgebung der Null ist, $\lambda(A) > 0$ erfüllt.

Aufgabe 2 (4+3+1+2 Punkte)

Wie in Ü8 A3 sei $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} q^{(n)}(x), \qquad \text{wobei} \quad q(x) = e^{-x^2},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{h}_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|tx|} e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda(x) \in [0, \infty)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) P(x) e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda(x) = 0$$

für alle Polynome P erfüllt, so gilt $f = 0$ (f. ü.). Hinweis: Beweisen Sie zunächst

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Beweisen Sie, daß $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ist.

c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x h_n(x) - h_n'(x) = h_{n+1}(x)$.

d) Bestimmen Sie $\hat{h}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (in Abhängigkeit von h_n).

Aufgabe 3 (2+5 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ in einer Umgebung von 0 beschränkt und $\hat{f} \geqslant 0$. Zeigen Sie, daß dann bereits $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt. Hinweis: Verwenden Sie Teil (a) mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|^2/(2T^2)}$ für $T > 0$.