Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 12. Juni 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 10

Abgabe bis Dienstag, den 19.06.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $B \supseteq A$ offen. Zeigen Sie, daß dann ein $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $f|_A = 1$ und $f|_{\mathbb{R}^n \setminus B} = 0$.

Aufgabe 2 (3+4+3+3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie die Leibniz-Regel: Für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^\gamma (f \cdot g) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} (\partial^\alpha f)(\partial^\beta g).$$

Dabei sei $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $|\partial^\alpha f(x)| \leqslant c(1 + |x|)^m$. Zeigen Sie, daß $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto f \cdot g$ stetig ist, also daß $g_k \to g$ in $S(\mathbb{R}^n)$ auch $f \cdot g_k \to f \cdot g$ in $S(\mathbb{R}^n)$ impliziert.

c) Zeigen Sie, daß für $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ auch $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt.

d) Geben Sie ein $f \in L^1(\mathbb{R})$ und ein $g \in S(\mathbb{R})$ mit $f * g \notin S(\mathbb{R})$ an.

e) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so daß eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $f|_{\mathbb{R}^n \setminus K} = 0$. Zeigen Sie, daß dann $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto f * g$ wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, d\lambda(x)$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^4} \, d\lambda(x)$

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{3}{2}}} \, d\lambda(x)$ (falls benötigt, darf $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ benutzt werden)

d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + |x|^2)^3} \, d\lambda(x)$