Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 19. Juni 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 11

Abgabe bis Dienstag, den 26.06.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geqslant a > 0$.

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\, d\lambda(x)$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, d\lambda(x)$.

Aufgabe 2 (3+2+4+3+2+2+4+4+3 Punkte)

Es sei $H = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]} = \hat{f} \text{ f. ü.}\}$ der Raum der *bandbeschränkten Funktionen.*

a) Zeigen Sie: H ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$.

b) Weisen Sie $H \subseteq C^0(\mathbb{R})$ nach, genauer: Zeigen Sie, daß für jedes $f \in H$ ein $g \in C^0(\mathbb{R})$ existiert mit $f = g$ f. ü.

c) Definiere

$$\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $(T_k \operatorname{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H ist.

d) Beweisen Sie den *Abtastsatz von Shannon:* Für jedes $f \in H$ (welches nach Teil (b) ohne Beschränkung der Allgemeinheit als stetig angenommen wird) und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(x-k),$$

wobei diese Reihe sowohl in L^2 als auch gleichmäßig konvergiert.

e) Zeigen Sie

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2$$

für alle (o. B. d. A. stetigen) $f \in H$.

f) Weisen Sie nach, daß für alle $f \in S(\mathbb{R})$ die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to R, \quad x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(x-k)$$

wohldefiniert ist, wobei die Reihe sowohl in L^2 als auch gleichmäßig konvergiert, und daß $g \in H$ gilt.

g) Seien f und g wie in Teil (f). Zeigen Sie

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l), & \text{falls } -\pi \leqslant \xi \leqslant \pi, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

h) Seien f und g wie in Teil (f). Beweisen Sie die Abschätzungen

$$\|f-g\|_2^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\pi,\pi]} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(\xi)$$

und

$$\|f-g\|_\infty \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\pi,\pi]} |\hat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\lambda(\xi).$$

i) Geben Sie ein $f \in S(\mathbb{R})$ an, für das das zugehörige g keine L^1-Funktion ist.