Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 26. Juni 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 12

Abgabe bis Dienstag, den 03.07.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (3+2+2 Punkte)

Für $f \in S(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$\Delta_a f := \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} |x-a|^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Beweisen Sie die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \hat{f}) \geqslant \frac{1}{4}$$

für alle $f \in S(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ und $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie $\|f\|_2^2 \leqslant 2\|xf\|_2 \|f'\|_2$ für alle $f \in S(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

b) Folgern Sie aus (a) die Ungleichung $(\Delta_0 f)(\Delta_0 \hat{f}) \geqslant \frac{1}{4}$ für alle $f \in S(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

c) Beweisen Sie mit (b) die Heisenbergsche Unschärferelation. Hinweis: Zu $f \in S(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ betrachte $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-i\alpha x} f(x+a)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (dabei bezeichnet f' die punktweise Ableitung, in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ mit beliebigen Werten). Ferner sei $f \in S'(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $f' \in S'(\mathbb{R})$ gilt, und bestimmen Sie $\partial f - f'$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Entscheiden Sie für die folgend (f. ü.) definierten Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils, ob sie temperierte Distributionen sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

$$f_1(x) = \sin(x), \qquad f_2(x) = e^x, \qquad f_3(x) = \log|x|, \qquad f_4(x) = e^x \sin(e^x).$$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

a) Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß es $C, k > 0$ gibt mit

$$\int_{K_r(0)} |f(x)| \, \mathrm{d}\lambda(x) \leqslant C(1+r)^k$$

für alle $r > 0$. Zeigen Sie, daß dann $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

b) Ist die Integralabschätzung aus (a) notwendig für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$?