Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
M. Ensenbach

Aachen, den 03. Juli 2007

Fourieranalysis, Übungsblatt 13

Abgabe bis Dienstag, den 10.07.2007, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.

a) Zeigen Sie, daß

$$\varphi : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x, 0) \, \mathrm{d}\lambda_m(x)$$

in $S'(\mathbb{R}^n)$ liegt.

b) Berechnen Sie $\hat{\varphi}$ explizit. Verwenden Sie dabei ohne Beweis folgende Aussage: Ist $f \in S(\mathbb{R}^n)$, so ist für $1 \leqslant m < n$ die *partielle Fouriertransformierte*

$$\mathcal{F}_m(f) : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n, \quad (y, z) \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x, z) e^{-i\langle x, y\rangle} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

ebenfalls in $S(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ eine Familie von Koeffizienten in $\mathbb{C}$, zu der es ein $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_k| \leqslant C(1 + |k|)^N$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Beweisen Sie, daß

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (x \mapsto a_k e^{i\langle k, x\rangle})$$

in $S'(\mathbb{R}^n)$ unbedingt konvergiert. Zeigen Sie dazu zunächst mit elementaren Methoden aus der Analysis, daß $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{-\alpha}$ für alle $\alpha > n$ konvergiert.

Aufgabe 3 (3+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |\sin x|$. Dann hat f die absolut konvergente reelle Fourierreihe

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}.$$

a) Zeigen Sie direkt mit der Definition von $\partial^2 f$ (wobei f gemäß 4.22(a) mit einem Element aus $S'(\mathbb{R})$ identifiziert wird), daß

$$\partial^2 f = -f + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\pi k}$$

gilt.

b) Leiten Sie das Ergebnis aus Teil (a) durch gliedweises Differenzieren der Fourierreihe her.

Aufgabe 4 (6+3+2+2 Punkte)

Es sei $\varphi \in S'(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\varphi(f) = \mathrm{PV}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right).$$

Für $\varepsilon > 0$ definiere $F_\varepsilon, S_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_\varepsilon(x) = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}, \qquad S_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|x|}\operatorname{sgn} x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei sgn die Vorzeichenfunktion bezeichnet (das heißt $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} x = 1$ für $x > 0$ und $\operatorname{sgn} x = -1$ für $x < 0$).

a) Zeigen Sie $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon = \varphi$ und $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} S_\varepsilon = \operatorname{sgn}$ in $S'(\mathbb{R})$.

b) Beweisen Sie $\hat{S}_\varepsilon = -2iF_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$.

c) Bestimmen Sie $\hat{\varphi}$ und $\widehat{\operatorname{sgn}}$ mit den Ergebnissen aus (a) und (b).

d) Bestimmen Sie $\hat{H}$ für die *Heaviside-Distribution*

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$