

Nachtrag zur Vorlesung: Bei Bemerkung 1.3 b) wurde folgende Aussage benötigt:
Die Inklusion

$$\{x \in C^1[0, 1] : x(0) = x'(0) = 0\} \subset \{x \in C[0, 1] : x(0) = 0\}$$

ist dicht bezüglich der Supremumsnorm, d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ und $x \in C[0, 1]$ mit $x(0) = 0$ existiert $y \in C^1[0, 1]$ mit $y(0) = y'(0) = 0$ und $\sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| < \epsilon$.

Beweis: Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz bilden die Polynomfunktionen einen dichten Teilraum von $C[0, 1]$. Also gibt es $y_1 \in C^1[0, 1]$ mit $\|y_1 - x\| < \epsilon/2$. Speziell gilt $|y_1(0)| < \epsilon/2$. Da y_1 stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so, daß $|y_1(t)| < \epsilon/2$ für alle $0 \leq t \leq \delta$.

Wähle $h \in C^1[0, 1]$ mit $0 \leq h(t) \leq 1$, für alle $t \in [0, 1]$, mit folgenden weiteren Eigenschaften: $h|_{[0, \delta/2]} = 0$, $h|_{[\delta, 1]} = 1$. (Die Existenz von Funktionen dieser Art wird üblicherweise in den Grundvorlesungen behandelt; siehe auch [Rudin, Functional Analysis, 1.46].)

Dann ist $y_2 = hy_1 \in C^1[0, 1]$, mit $y_2(0) = y_2'(0) = 0$. Zudem gilt für $t \in [0, 1]$:

- Falls $0 \leq t \leq \delta/2$, so ist $|y_1(t) - y_2(t)| = |y_1(t)| < \epsilon/2$.
- Falls $\delta/2 \leq t \leq \delta$, so gilt $|y_1(t) - y_2(t)| = |(1 - h(t))y_1(t)| < \epsilon/2$.
- Falls $t > \delta$, so gilt $|y_1(t) - y_2(t)| = 0$.

Also $\|y_2 - y_1\| < \epsilon/2$, und damit $\|y_2 - x\| < \epsilon$.