Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 9. April 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 1

Abgabe bis Freitag, den 18. April 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$T : \ell^1 \to \ell^1, (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$$

der Shiftoperator.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und das Spektrum des Shiftoperators sowie des dualen Operators $T' : \ell^\infty \to \ell^\infty$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und das Spektrum des Shiftoperators betrachtet als Operator von ℓ^2 in sich. Bestimmen Sie ferner das Spektrum von T^*T und TT^*.

(Hinweis: Sie können ohne Beweis $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$ verwenden.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Zu jeder kompakten nicht-leeren Teilmenge K von $\mathbb{K}$, gibt es einen Operator $T \in \mathcal{L}\left(\ell^2\right)$ mit $\sigma(T) = K$.

(Hinweis: Versuchen Sie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ ein Operator, für den $\|T\| \in \sigma(T)$. Zeigen Sie:

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|$$

(Hinweis: Siehe Hinweis zu Aufgabe 1.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X ein Banachraum, $T_n \in \mathcal{L}(X)$ eine Folge von Operatoren, die in der Operatornorm gegen $T \in \mathcal{L}(X)$ konvergiert, und $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ eine Folge, die gegen $\lambda \in \mathbb{K}$ konvergiert. Zeigen Sie:

$$\lambda \in \sigma(T)$$

Übungsschein: 50 % der Hausaufgabenpunkte

Sprechstunden:	Prof. Dr. H. Führ	Do. 13:30 Uhr	Raum 38, Schinkelstr. 4
	Dr. M. Neuhauser	nach Vereinbarung	Raum 35, Schinkelstr. 4