Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 16. April 2008

# Funktionalanalysis II, Übungsblatt 2

Abgabe bis Freitag, den 25. April 2008, 13:15 Uhr

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Es sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Ein $\lambda \in \mathbb{K}$ wird *approximativer Eigenwert* genannt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $\|\lambda x - Tx\| < \varepsilon \|x\|$ gibt. Die Menge aller approximativen Eigenwerte wird *approximatives Punktspektrum* genannt und mit $\sigma_{\text{ap}}(T)$ bezeichnet. Zeigen Sie: Das approximative Punktspektrum ist abgeschlossen.

**Aufgabe 6** (5 Punkte)

Es sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Für ein Polynom $P : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ sei $P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^0 = \text{Id}_X$.

(a) Es sei $P$ ein Polynom mit $P(T) = 0$. Zeigen Sie:
$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : P(\lambda) = 0\}$$

(b) Es sei $X$ ein Hilbertraum und $Y$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $X$ und $T \in \mathcal{L}(X)$ die Projektion auf $Y$. Zeigen Sie $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$.

**Aufgabe 7** (4 Punkte)

Es sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$ und $P$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeigen Sie für das (approximative) Punktspektrum (siehe Aufgabe 5):
$$\sigma_{\text{p}}(P(T)) = \left\{P(\lambda) : \lambda \in \sigma_{\text{p}}(T)\right\}, \sigma_{\text{ap}}(P(T)) = \left\{P(\lambda) : \lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T)\right\}$$

**Aufgabe 8** (5 Punkte)

Es sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $S, T \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie:

(a) Falls $ST = TS$, so gilt für den Spektralradius $r(ST) \leqslant r(S)\, r(T)$ und $r(S+T) \leqslant r(S) + r(T)$.

(b) Widerlegen Sie die Ungleichungen ohne die Annahme $ST = TS$ durch je ein Gegenbeispiel.

**Aufgabe 9** (3 Punkte)

Es sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie: Für den Spektralradius gilt $r(T) = 0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} (\lambda T)^n = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit Konvergenz in der Norm.