Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 23. April 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 3

Abgabe bis Freitag, den 2. Mai 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Es sei $h \in L^\infty(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ und $T_h \in \mathcal{L}(L^p(0,1))$ definiert durch $(T_h f)(t) = h(t) f(t)$ für m-fast alle $t \in [0,1]$, wobei $m(Q) = \int \chi_Q \, \mathrm{d}t$ das Lebesgue-Integral der charakteristischen Funktion von Q.

(a) Bestimmen Sie das Punktspektrum, das kontinuierliche Spektrum und das Residualspektrum von T_h und zeigen Sie:

$$\sigma(T_h) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} : m\left(h^{-1}\left(\{\mu \in \mathbb{K} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}\right)\right) > 0 \forall \varepsilon > 0\right\}$$

(b) Zeigen Sie:

Der Operator T_h ist nur dann kompakt, wenn $h = 0$.

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Der Operator T wird *vollstetig* genannt, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen in X, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) Falls $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein kompakter Operator ist, so ist T vollstetig.

(b) Ist X separabel und reflexiv und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ vollstetig, so ist T kompakt.

(Hinweis: Banach–Alaoglu!)

Aufgabe 12 (5 Punkte)

(a) Der Raum $C^1([0,1])$ trage die Norm $\|f\| = \max\left\{\|f\|_{C([0,1])}, \|f'\|_{C([0,1])}\right\}$.

Zeigen Sie:

Die Inklusionsabbildung $\left(C^1([0,1]), \|.\|\right) \to \left(C([0,1]), \|.\|_{C([0,1])}\right)$ ist kompakt.

(Hinweis: Arzela–Ascoli!)

(b) Folgern Sie aus (a) die Kompaktheit des Operators $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$, $(Tf)(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$ aus Beispiel 1.3 a) der Vorlesung.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Es sei $1 \leqslant p < \infty$. Der Operator $T : L^p(0,1) \to L^1(\mathbb{R})$ sei definiert durch:

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Der Operator T ist wohldefiniert, d. h. $Tf \in L^1(\mathbb{R})$, und $T \in \mathcal{L}\left(L^p(0,1), L^1(\mathbb{R})\right)$.

(b) Der Operator T ist nicht kompakt.