



Funktionalanalysis II, Übungsblatt 5

Abgabe bis Freitag, den 23. Mai 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 16 (5 Punkte)

Es sei H ein Hilbertraum. Es seien $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ die Singulärwerte von $T \in \mathcal{K}(H)$, absteigend geordnet. Wir definieren die n -te Approximationszahl von T als:

$$a_n = \inf \{ \|T - A\| : A \in \mathcal{K}(H), \dim(\text{Range}(A)) < n \}$$

Zeigen Sie:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = s_n$.

Aufgabe 17 (3 Punkte)

Es seien H ein Hilbertraum und $T \in \text{HS}(H)$ mit Spektralradius $r(T) < 1$.

Zeigen Sie:

Es gilt $(\text{Id}_H - T)^{-1} = \text{Id}_H + R$ mit $R \in \text{HS}(H)$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Es seien ein Verschiebungsoperator T und ein Multiplikationsoperator M auf ℓ^2 definiert durch:

$$\begin{aligned} (Tx)_n &= \begin{cases} 0, & n = 1, \\ x_{n-1}, & n \geq 2, \end{cases} \\ (Mx)_n &= \frac{1}{n} x_n, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es sei $R = TM$.

(a) Zeigen Sie:

Der Operator R ist kompakt.

(b) Bestimmen Sie die Singulärwerte von R .

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$ normal mit Spektraldarstellung $\sum_{j \in J} \lambda_j Q_j$. Dabei ist $(\lambda_j)_{j \in J}$ eine injektive Aufzählung der Eigenwerte und Q_j die zugehörige Spektralprojektion.

Zeigen Sie für $S \in \mathcal{L}(H)$:

Genau dann gilt $ST = TS$, wenn für alle $j \in J$ gilt $SQ_j = Q_j S$.

(Hinweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $ST^n = T^n S$.)

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Es seien H ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{K}(H)$ und $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der Singulärwerte von T .

(a) Zeigen Sie:

Für die Hilbert-Schmidt-Norm gilt $\|T\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2)^{1/2}$.

(b) Folgern Sie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in \text{HS}(H)$ normal mit Spektraldarstellung $\sum_{j \in J} \lambda_j Q_j$ aus (a):

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{j \in J} |\lambda_j|^2 \dim(\text{Range}(Q_j)) \right)^{1/2}$$

(c) Es seien T wie in (b) und $S \in \text{HS}(H)$ normal mit Spektraldarstellung $\sum_{i \in I} \mu_i P_i$ und $ST = TS$.

Zeigen Sie:

$$(T, S) = \sum_{j \in J, i \in I} \lambda_j \overline{\mu_i} \dim(\text{Range}(Q_j P_i))$$