Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 21. Mai 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 6

Abgabe bis Freitag, den 30. Mai 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetig* und *periodisch*, d. h. $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der *Faltungsoperator* zu f sei gegeben durch $Tg(t) = \int_0^1 g(s) f(t-s)\, ds$ für $g \in L^2[0,1]$ und $t \in [0,1]$. Es sei $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Sie können $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ohne Beweis als vollständiges Orthonormalsystem von $L^2[0,1]$ verwenden. Zeigen Sie:

(a) Der Operator T ist ein kompakter Endomorphismus von $L^2[0,1]$.

(b) Die Eigenwerte von T sind die *Fourierkoeffizienten* $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt$ von f. Geben Sie die Spektralzerlegung von T explizit an.

(c) Es ist $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Aufgabe 22 (6 Punkte)

Es sei $k \in C\left([0,1]^2\right)$ symmetrisch und $T_k : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ der zugehörige Integraloperator. Der Kern k wird positiv semidefinit genannt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s_1, \ldots, s_n \in [0,1]$ die Matrix $\left(k(s_i, s_j)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ positiv semidefinit ist. Zeigen Sie:

(a) Der Operator T_k ist positiv genau dann, wenn k positiv semidefinit ist.

(b) Falls k positiv semidefinit ist, so gilt:

$$|k(s,t)|^2 \leqslant k(s,s)\, k(t,t)\ \forall s,t \in [0,1]$$

(c) Für $k(s,t) = |s-t|^\alpha$ mit $\alpha > 0$, ist T_k nicht positiv.

Aufgabe 23 (5 Punkte)

Es sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eindeutig bestimmte selbstadjungierte $A, B \in \mathcal{L}(H)$ mit $T = A + iB$.

(b) Der Operator T ist normal genau dann, wenn für A und B aus (a) $AB = BA$ gilt.

(c) Falls T kompakt und normal, so sind auch A und B aus (a) kompakt. Drücken Sie die Spektralzerlegung von T durch die Spektralzerlegungen von A und B aus.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, falls P und Q Orthogonalprojektionen sind mit $PQ = QP$, so ist auch PQ Orthogonalprojektion.)