Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 28. Mai 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 7

Abgabe bis Freitag, den 6. Juni 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Es seien H ein Hilbertraum und T ein selbstadjungierter beschränkter Operator auf H mit endlichem Spektrum. Für $\lambda \in \sigma(T)$ sei $P(\lambda)$ die Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert λ.

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\sum_{\lambda \in \sigma(T)} P(\lambda) = \mathrm{Id}_H$.

(b) Falls $Tv \in V$ für alle $v \in V$, d. h. V ist ein T-invarianter Unterraum von H, so gilt $P(\lambda) v \in V$ für $v \in V$ und $\lambda \in \sigma(T)$.

Aufgabe 25 (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert.

Zeigen Sie für $\lambda \in \rho(T)$:

$$\left\| (T - \lambda)^{-1} \right\| = \frac{1}{\inf \{ |\mu - \lambda| : \mu \in \sigma(T) \}}$$

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Es sei $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definiert durch $(Tx)_n = x_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \ell^2$.

Bestimmen Sie den numerischen Wertebereich $W(T) = \{ (Tx, x) : \|x\| = 1 \}$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Es seien H ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator, $\lambda \in \sigma(T)$ und $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ abgeschlossen.

Zeigen Sie:

Es gilt $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(Hinweis: Wenden Sie den Funktionalkalkül auf die charakteristische Funktion von $\{\lambda\}$ an.)