Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 4. Juni 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 8

Abgabe bis Freitag, den 13. Juni 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 28 (6 Punkte)

Es seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ habe nur den Häufungspunkt 0. Zeigen Sie: Das Spektrum $\sigma(T)$ ist abzählbar mit $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ und es gilt $T = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)} \lambda P_\lambda$. Dabei ist P_λ die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Kern}\,(T - \lambda)$.

Aufgabe 29 (Analytischer Funktionalkalkül) (6 Punkte)

Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, X ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r(T)$. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ konvergiert in $\mathcal{L}(X)$.

(b) Ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r(T)$, so gilt $(fg)(T) = f(T)\,g(T)$.

Für einen selbstadjungierten Operator T auf einem Hilbertraum stimmen die definierten Operatoren $f(T)$ überein.

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Es bezeichne:

$$\begin{aligned} m(T) &= \inf\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \\ M(T) &= \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \\ w(T) &= \sup\{|z| : z \in W(T)\} \end{aligned}$$

Der Wert $w(T)$ wird numerischer Radius von T genannt. Zeigen Sie:

(a) Falls T positiv, so gilt $|(Tx, y)|^2 \leqslant (Tx, x)(Ty, y)$ für alle $x, y \in H$.

(b) Es gilt $m(T), M(T) \in \sigma(T)$.

(Hinweis: Schätzen Sie $\|(T - m(T))\,x\|$ geeignet durch $((T - m(T))\,x, x)$ ab.)

(c) Es gilt $\|T\| = w(T) = r(T)$.