Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 11. Juni 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 9

Abgabe bis Freitag, den 20. Juni 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 31 (9 Punkte)

Es seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und μ ein Spektralmaß.

(a) Zeigen Sie für alle $u \in H$:

Durch $\mu_{u,u} : A \mapsto (\mu(A)u, u)$ wird ein $\mu_{u,u} \in M_+(\mathbb{K})$ definiert mit

$$\int_{\mathbb{K}} 1 \, \mathrm{d}\mu_{u,u}(t) = \|u\|^2$$

(b) Es sei $f \in B(\mathbb{K})$ mit $|f(t)| \geqslant r$ für alle $t \in \mathbb{K}$.

Zeigen Sie $\left\| \int_{\mathbb{K}} f(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \, u \right\| \geqslant r \|u\|$ für alle $u \in H$.

(c) Zeigen Sie für $g \in B(\mathbb{K})$:

Falls $f(t) = g(t)$ für μ-fast alle $t \in \mathbb{K}$ ist, d. h. $\mu(\{t \in \mathbb{K} : f(t) \neq g(t)\}) = 0$, so gilt $\int_{\mathbb{K}} f(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{K}} g(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$.

(d) Zeigen Sie:

$$\left\| \int_{\mathbb{K}} f(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \right\| = \|f\|_{L^\infty(\mu)} := \inf\{r \geqslant 0 : \mu(\{t \in \mathbb{K} : |f(t)| > r\}) = 0\}$$

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Es sei $H = L^2(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie:

Die Abbildung $\mu : \Omega(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H)$, $\mu(A)(f) = \chi_A \cdot f$ ist ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$.

(b) Es sei $f \in B(\mathbb{R})$ und:

$$T = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

Zeigen Sie für alle $g \in H$:

Es gilt $Tg = f \cdot g$ (punktweise Multiplikation).