Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 25. Juni 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 11

Abgabe bis Freitag, den 4. Juli 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 36 (8 Punkte)

Betrachten Sie $L^2[-\pi,\pi]$, dann bilden die Funktionen $e_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}, e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ für $n \in \mathbb{Z}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}\left(L^2[-\pi,\pi]\right)$ mit $Ue_n = e_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Finden Sie einen abgeschlossenen Unterraum X von $L^2[-\pi,\pi]$ der U-invariant, aber nicht U^*-invariant ist, und zeigen Sie: Der Raum $X^\perp$ ist U^*-invariant, aber nicht U-invariant.

(c) Zeigen Sie: Für $\lambda \in (-1,1]$ und $f \in L^2[-\pi,\pi]$ definieren

$$\begin{aligned} (E_\lambda f)(t) &= \left(1 - \chi_{(-\arccos(\lambda),\arccos(\lambda))}(t)\right) f(t), \\ (F_\lambda f)(t) &= \begin{cases} \left(1 - \chi_{(\arcsin(\lambda),\pi-\arcsin(\lambda))}(t)\right) f(t), & \lambda \in [0,1) \\ \chi_{[-\pi-\arcsin(\lambda),\arcsin(\lambda)]}(t)\, f(t), & \lambda \in (-1,0) \end{cases} \end{aligned}$$

die Spektralscharen von $\operatorname{Re} U$ bzw. $\operatorname{Im} U$.

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Es seien H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein Operator. Zeigen Sie: Durch $[V(G(T))]^\perp$ wird genau dann der Graph eines linearen Operators auf H beschrieben, wenn $D(T)$ dicht in H liegt.

Aufgabe 38 (6 Punkte)

Zu $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ wird das *Faltungsprodukt* $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für $t \in \mathbb{R}$ durch $(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, g(t-s)\, \mathrm{d}s$ definiert. Zu festem $g \in L^2(\mathbb{R})$ sei der Faltungsoperator T definiert durch $Tf = f * g$ für $f \in D(T) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f * g \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$. Dann gilt $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset D(T)$, speziell ist T dicht definiert. Zeigen Sie:

(a) Der Operator T ist abgeschlossen.

(b) Der Operator T^* ist der Faltungsoperator zur Funktion $g^* \in L^2(\mathbb{R})$, definiert durch $g^*(t) = \overline{g(-t)}$ für $t \in \mathbb{R}$.