Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 2. Juli 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 12

Abgabe bis Freitag, den 11. Juli 2008, 13:15 Uhr

Aufgabe 39 (5 Punkte)

Es seien H ein Hilbertraum und $V : H \to H$ isometrisch auf $D(V)$ mit $\mathrm{Id}_H - V$ injektiv. Zeigen Sie: Der Operator V ist die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators auf H.

(Hinweis: Vgl. Bemerkung 7.14)

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Es sei H^2 der Raum der holomorphen Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ auf dem offenen Einheitskreis, für die

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

gilt.

(a) Zeigen Sie: Der Raum H^2 ist ein Hilbertraum und durch die bijektive Zuordnung $f \leftrightarrow (c_n)_{n\geqslant 0}$ isomorph zu ℓ^2.

(b) Es seien $T, U : H^2 \to H^2$ definiert durch $(Uf)(z) = zf(z)$ bzw.:

$$(Tf)(z) = i\frac{1+z}{1-z}f(z)$$

Zeigen Sie: Der Operator T ist symmetrisch und U ist die Cayley-Transformierte von T.

(c) Bestimmen Sie die Bilder von $T + i\,\mathrm{Id}_H$ und $T - i\,\mathrm{Id}_H$ und zeigen Sie: Eines davon ist H^2 und eines hat Kodimension 1.

(d) Nun sei $U \in \mathcal{L}(H^2)$ definiert durch:

$$(Uf)(z) = zf\left(z^2\right)$$

Zeigen Sie: Der Operator U ist eine Isometrie und diese ist die Cayley-Transformierte eines abgeschlossenen symmetrischen Operators T auf H^2 mit Defektindizes 0 und ∞.

(Hinweis: Aufgabe 39)