LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 9. Juli 2008

Funktionalanalysis II, Übungsblatt 13

Abgabe bis Freitag, den 18. Juli 2008, 13:15 Uhr

Im folgenden sei stets H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Es sei $T : H \to H$ dicht definiert und abgeschlossen, mit $D(T) = D(T^*)$. Es gelte

$$\forall x \in D(T) : \|Tx\| = \|T^*x\| .$$

Zeigen Sie: T ist normal, das heißt $TT^* = T^*T$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Es sei $\mathrm{AC}[0,1] \subset \mathrm{L}^2[0,1]$ der Raum der absolutstetigen Funktionen f mit $f' \in \mathrm{L}^2[0,1]$, wie in Beispiel 7.7 beschrieben. Es sei

$$D = \{f \in \mathrm{C}^1[0,1] \ : \ f' \in \mathrm{AC}[0,1]\} .$$

Zeigen Sie: Für alle $g \in \mathrm{L}^2[0,1]$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in D$ mit

$$f - f'' = g \ , \ f(0) = f(1) = 0 .$$

Aufgabe 43 (6 Punkte)

Es sei μ ein Spektralmaß auf $\mathbb{K}$ mit Werten in $\mathcal{L}(H)$, $f : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ eine Borel-meßbare Funktion, und

$$T = \int_{\mathbb{K}} f(t) d\mu(t) .$$

(a) Für $a > 0$ sei $E_a = \{t \in \mathbb{K} \ : \ |f(t)| \leq a\}$, und $H_a \subset H$ sei definiert durch $H_a = \mu(E_a)(H)$. Zeigen Sie:

$$H_a = \{x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(T^n) \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \|T^n x\| \leq a^n \|x\|\} .$$

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(H)$ so, daß

$$(*) \ \ \forall x \in D(T) \ : \ Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x .$$

Zeigen Sie ferner: $T \in \mathcal{L}(H)$ genau dann, wenn es eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die $(*)$ erfüllt und zusätzlich beschränkt in der Operatornorm ist.