Die Eta-Funktion

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 09.04.2008

Nils Noschinski

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit der Dedekindschen Eta-Funktion und deren Transformationsverhalten unter Modulsubsitutionen.

§1 Die bedingt konvergente Eisenstein-Reihe

Die bedingt konvergente Eisenstein-Reihe wird im Weiteren benötigt, um Aussagen über das Transformationsverhalten der Dedekindschen Eta-Funktion zu beweisen.

(1.1) Definition
Nach dem Vorbild von G. Eisenstein definiert man die bedingt konvergente Eisenstein-Reihe

$$G_2(\tau) := \sum_{n\neq 0} n^{-2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-2} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

◇

Die bedingte Konvergenz ist nicht offensichtlich, wird aber im Beweis der nächsten Proposition bewiesen.

Um den Beweis der nächsten Proposition etwas übersichtlicher zu gestalten, werden zunächst die beiden folgenden Hilfssätze gezeigt.

(1.2) Hilfssatz
Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau+n)^{-2} = (-2\pi i)^2 \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i \tau r}.$$

◇

Beweis
Aus Krieg, Analysis IV, 2007, XX (1.2) wissen wir, dass

$$\pi \cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\tau}{\tau^2 - n^2} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \tag{1}$$

gilt, wobei die Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ offen ist und $f : \tau \mapsto \frac{2\tau}{\tau^2 - n^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorph ist, folgt also mit dem Satz von Weierstrass die gliedweise Differenzierbarkeit der Reihe.

Differenziert man beide Seiten so erhält man damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\pi \cot\left(\pi\tau\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\pi \frac{\cos\left(\pi\tau\right)}{\sin\left(\pi\tau\right)}\right) \\ &= \pi \frac{-\pi \sin^2\left(\pi\tau\right) - \pi\cos^2\left(\pi\tau\right)}{\sin^2\left(\pi\tau\right)} = -\left(\frac{\pi}{\sin\left(\pi\tau\right)}\right)^2\end{aligned}$$

für die linke Seite und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\tau}{\tau^2 - n^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau - n} + \frac{1}{\tau + n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\tau^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{(\tau - n)^2} + \frac{-1}{(\tau + n)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\tau^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(\tau - n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(\tau + n)^2} \\ &= -\left(\frac{1}{\tau^2} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{(\tau + n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\tau + n)^2}\right) \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau + n)^{-2}\end{aligned}$$

für die rechte Seite, wobei man die Reihe in Zeile 2 auseinanderziehen darf, da die Reihen auf der rechten Seite offenbar konvergieren. Insgesamt bekommt man also

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau + n)^{-2} = \left(\frac{\pi}{\sin\left(\pi\tau\right)}\right). \tag{2}$$

Schreibt man nun den Sinus mit Hilfe der Exponentialfunktion um, ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{\sin\left(\pi\tau\right)}\right) &= \left(\frac{\pi}{\frac{1}{2i}\left(e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}\right)}\right)^2 = \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2\pi i e^{\pi i\tau}}{e^{2\pi i\tau} - 1}\right)^2 = (-2\pi i)^2 e^{2\pi i\tau}\left(\frac{1}{1 - e^{2\pi i\tau}}\right)^2.\end{aligned}$$

Es gilt $|e^{2\pi i\tau}| = e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} < 1$, da $\tau \in \mathbb{H}$. Daher gilt mit der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-e^{2\pi i\tau}} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{2\pi i\tau r}$. Da die geometrische Reihe absolut konvergiert, kann man nun das Cauchy-Produkt anwenden und erhält

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=0}^{\infty} e^{2\pi i\tau r}\right)^2 &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r} e^{2\pi i\tau j} e^{2\pi i\tau(r-j)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r} e^{2\pi i\tau r} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)\, e^{2\pi i\tau r},\end{aligned}$$

und somit

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)}\right)^2 = (-2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)\, e^{2\pi i\tau(r+1)} = (-2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i\tau r}.$$

Mit (2) folgt dann die Behauptung. □

(1.3) Hilfssatz
Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt:

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{r\geq 1} r e^{2\pi i\tau rm} \quad \text{konvergiert absolut.}$$

◇

Beweis
Sei $t := \operatorname{Im}\tau$. Dann gilt $t > 0$ und es existieren Konstanten $c, d > 0$ mit $de^{-2\pi tmr} < 1$ für alle $m, r \in \mathbb{N}$. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1}\sum_{r\geq 1} \left| r e^{2\pi i\tau rm}\right| &= \sum_{m\geq 1}\sum_{r\geq 1} r e^{-2\pi trm} \\ &\leq \sum_{m\geq 1}\sum_{r\geq 1} c d^r e^{-2\pi trm} \\ &= c \cdot \sum_{m\geq 1}\sum_{r\geq 1} \left(de^{-2\pi tm}\right)^r \\ &= c \cdot \sum_{m\geq 1} \frac{de^{-2\pi tm}}{1-de^{-2\pi tm}} \\ &\leq \frac{cd}{1-de^{-2\pi t}} \cdot \sum_{m\geq 1} e^{-2\pi tm} < \infty,\end{aligned}$$

da $m \mapsto de^{2\pi t m}$ monoton fallend ist. Da das t auf jedem Kompaktum K in $\mathbb{H}$ ein Minimum annimmt größer 0, liefert einem das WEIERSTRASSsche Majorantenkriterium auch noch lokal gleichmäßige Konvergenz. □

(1.4) Proposition
Die Funktion $G_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau}\right)$$

mit

$$\sigma_s(n) := \sum_{d \in \mathbb{N},\, d|n} d^s, \quad s \in \mathbb{R}$$

◇

Beweis
Für $\tau \in \mathbb{H}$ hat man

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) &:= \sum_{n \neq 0} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + \sum_{n<0} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \\
&= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \\
&= 2 \cdot \zeta(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} + \sum_{m<0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \\
&= 2 \cdot \zeta(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} + \sum_{m<0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau - n)^{-2} \\
&= 2 \cdot \zeta(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-m\tau - n)^{-2} \\
&= 2 \cdot \zeta(2) + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \qquad (3) \\
&\overset{1.2}{=} 2 \cdot \zeta(2) + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left((-2\pi i)^2 \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i \tau r m}\right) \\
&= 2 \cdot \zeta(2) - 8\pi^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i \tau r m}.
\end{aligned}$$

Da die letzte Reihe nach 1.3 absolut konvergiert, folgt hier die bedingte Konvergenz von G_2. Außerdem darf man jetzt die Summanden umordnen. Fasst man alle Terme mit $mr = n$ zusammen erhält man

$$\begin{aligned}
&2 \cdot \zeta(2) - 8\pi^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i \tau r m} \\
&= 2 \cdot \zeta(2) - 8\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d e^{2\pi i \tau n} \\
&= 2\frac{\pi^2}{6} - 8\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e^{2\pi i \tau n} \\
&= \frac{\pi^2}{3}\Big(1 - 24\pi^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e^{2\pi i \tau n}\Big)}_{(*)},
\end{aligned}$$

wenn man $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ beachtet. Wegen $\sigma_1(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|e^{2\pi i \tau}| < 1$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |e^{2\pi i \tau}|^n$ eine konvergente Majorante der Reihe $(*)$. Da $\tau \mapsto e^{2\pi i \tau n}$ eine ganze Funktion ist, liefert das Weierstrasssche Majroantenkriterium die lokal gleichmäßige Konvergenz von $(*)$. Jetzt folgt mit dem Satz von Weierstrass die Holomorphie. □

Als nächstes wird das Transformationsverhalten von G_2 unter Modulsubstitutionen untersucht. Es handelt sich zwar um keine Modulform, aber man hat den

(1.5) Satz
Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

a) $G_2(\tau + 1) = G_2(\tau)$,

b) $G_2(-1/\tau) = \tau^2 \cdot G_2(\tau) - 2\pi i \tau$. ◇

Beweis

a) Die Behauptung folgt direkt aus der Darstellung in 1.4 mit Hilfe der 2π-Periodizität von e^{iz}.

b) Wie im Beweis zu 1.4 gezeigt, lässt sich G_2 umschreiben zu (3), also

$$G_2(\tau) = 2 \cdot \zeta(2) + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2},$$

wobei die Reihe absolut konvergiert. Da weiterhin $\sum_{m=1}^{\infty} (m\tau)^{-2} = \frac{1}{\tau^2} \cdot \zeta(2)$ gilt, bekommt man

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) &= 2\cdot\zeta(2) + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(m\tau+n)^{-2} + \sum_{n=-1}^{-\infty}(m\tau+n)^{-2} + (m\tau)^{-2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(m\tau+n)^{-2} + \sum_{n=-1}^{-\infty}(m\tau+n)^{-2}\right) + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(m\tau)^{-2} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(m\tau+n)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(m\tau-n)^{-2}\right) + \frac{2}{\tau^2}\cdot\zeta(2) \\
&= \frac{\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right) + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left((m\tau+n)^{-2} + (m\tau-n)^{-2}\right),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{1}{\tau}\right)^2}\right) \\
&\quad +2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(m\left(-\frac{1}{\tau}\right)+n\right)^{-2} + \left(m\left(-\frac{1}{\tau}\right)-n\right)^{-2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3}\left(1+\tau^2\right) + 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{-2}\left((m-n\tau)^{-2} + (m+n\tau)^{-2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3}\left(1+\tau^2\right) + 2\tau^2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left((n\tau-m)^{-2} + (n\tau+m)^{-2}\right).
\end{aligned}$$

Jetzt setzt man $A_{mn} := (m\tau+n)^{-2} + (m\tau-n)^{-2}$ und definiert

$$\begin{aligned}
F(\tau) &:= \frac{1}{2\tau^2}\cdot\left(\tau^2 G_2(\tau) - G_2(-1/\tau)\right) \qquad (4) \\
&= \frac{1}{2\tau^2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{3}\cdot\left(\tau^2+1\right) + 2\tau^2\cdot\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}A_{mn}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\tau^2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{3}\cdot\left(1+\tau^2\right) + 2\tau^2\cdot\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}A_{nm}\right) \\
&= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}A_{mn} - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}A_{nm} \\
&= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}A_{mn} - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}A_{mn}.
\end{aligned}$$

Mit dieser Definition gilt nun

$$G_2\left(-1/\tau\right) = \tau^2 \cdot G_2\left(\tau\right) - 2\pi i \tau \Leftrightarrow \tau \cdot F\left(\tau\right) = \pi i \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}, \tag{5}$$

denn

$$\begin{aligned} G_2\left(-1/\tau\right) = \tau^2 \cdot G_2\left(\tau\right) - 2\pi i \tau &\Leftrightarrow \tau^2 \cdot G_2\left(\tau\right) - G_2\left(-1/\tau\right) = 2\pi i \tau \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\tau} \cdot \Big(\tau^2 \cdot G_2\left(\tau\right) - G_2\left(-1/\tau\right)\Big) = \pi i \\ &\Leftrightarrow F\left(\tau\right) = \pi i. \end{aligned}$$

Diese Charakterisierung der Behauptung wird nun im Folgenden gezeigt. Dazu definiert man sich B_{mn} für $m \geq 1$ und $n \geq 1$ durch

$$\begin{aligned} B_{mn} &:= \frac{1}{m\tau + n - 1} - \frac{1}{m\tau + n} + \frac{1}{m\tau - n} - \frac{1}{m\tau - n + 1} \\ &= \frac{1}{\left(m\tau + n\right)\left(m\tau + n - 1\right)} + \frac{1}{\left(m\tau - n\right)\left(m\tau - n + 1\right)}. \end{aligned}$$

Nach [A. Krieg] XXIX (2.1) erhält man folgende Aussage: Zu jedem Kompaktum K in $\mathbb{H}$ gibt es positive Konstanten γ, β mit

$$
\begin{aligned}
|A_{mn}-B_{mn}| &= \left|\frac{1}{(m\tau+n)^2}+\frac{1}{(m\tau-n)^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{(m\tau+n)(m\tau+n-1)}-\frac{1}{(m\tau-n)(m\tau-n+1)}\right|\\
&= \left|\frac{m\tau+n-1-m\tau-n}{(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)}+\frac{m\tau-n+1-m\tau+n}{(m\tau-n)^2(m\tau-n+1)}\right|\\
&= \left|\frac{1}{(m\tau-n)^2(m\tau-n+1)}-\frac{1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)}\right|\\
&= \left|\frac{(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)-(m\tau-n)^2(m\tau-n+1)}{(m\tau-n)^2(m\tau-n+1)(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)}\right|\\
&= \left|\frac{(m\tau+n)^3-(m\tau+n)-(m\tau-n)^3-(m\tau-n)}{(m\tau-n)^2(m\tau-n+1)(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)}\right|\\
&\le \frac{|m\tau+n|^3+|m\tau+n|+|m\tau-n|^3+|m\tau-n|}{|m\tau-n|^2\cdot|m\tau-n+1|\cdot|m\tau+n|^2\cdot|m\tau+n-1|}\\
&\le \frac{\gamma\left(|mi+n|^3+|mi+n|+|mi-n|^3+|mi-n|\right)}{\beta|mi-n|^2\cdot|mi-n+1|\cdot|mi+n|^2\cdot|mi+n-1|}\\
&= \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{2\left(m^2+n^2\right)^{\frac{3}{2}}+2\left(m^2+n^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(m^2+n^2)^2\left(m^2+(n-1)^2\right)}\\
&\overset{m,n\ge 1}{\le} \frac{4\gamma}{\beta}\cdot\frac{\left(m^2+n^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(m^2+n^2)^2\left(m^2+(n-1)^2\right)}\\
&\overset{(*)}{\le} \frac{4\gamma}{\beta}\cdot\frac{\left(m^2+n^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{10}\cdot(m^2+n^2)^3}\\
&\le \frac{40\gamma}{\beta}\cdot\left(m^2+n^2\right)^{-\frac{3}{2}}\\
&\overset{(**)}{\le} \frac{40\gamma}{\beta}\cdot(mn)^{-\frac{3}{2}},
\end{aligned}
$$

wobei $(*)$ aus

$$m^2 + (n-1)^2 \geq \frac{1}{10} \cdot \left(m^2 + n^2\right) \Leftrightarrow 9m^2 + 9n^2 - 20n + 10 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 9m^2 + \left(3n - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{10}{9} \geq 0$$

wegen $m \geq 1$, und $(**)$ aus

$$m^2 + n^2 \geq mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 - mn \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(m^2 + n^2 + (m-n)^2\right) \geq 0$$

folgt. Daher existiert insbesondere zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ ein positives γ_τ mit $|A_{mn} - B_{mn}| \leq \gamma_\tau m^{-3/2} n^{-3/2}$. Damit gilt dann

$$\sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 1} |A_{mn} - B_{mn}| \leq \gamma_\tau \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 1} m^{-3/2} n^{-3/2} \leq \gamma_\tau \sum_{m\geq 1} \left(m^{-3/2} \sum_{n\geq 1} n^{-3/2} \right)$$
$$\leq \gamma_\tau \left(\sum_{n\geq 1} n^{-3/2} \right) \left(\sum_{m\geq 1} m^{-3/2} \right) < \infty.$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent und man bekommt

$$\sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 1} (A_{mn} - B_{mn}) = \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} (A_{mn} - B_{mn}).$$

Zusammen mit (4) gilt dann

$$\begin{aligned} F(\tau) &= F(\tau) - \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 1} (A_{mn} - B_{mn}) + \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} (A_{mn} - B_{mn}) \\ &= \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 1} B_{mn} - \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} B_{mn}. \end{aligned} \tag{6}$$

Betrachtet man $\sum_{n\geq 1} B_{mn}$ genauer, erhält man sofort

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} B_{mn} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m\tau+n-1}-\frac{1}{m\tau+n}+\frac{1}{m\tau-n}-\frac{1}{m\tau-n+1}\right)\\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{m\tau+n-1}-\frac{1}{m\tau+n}+\frac{1}{m\tau-n}-\frac{1}{m\tau-n+1}\right)\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{m\tau}-\frac{1}{m\tau}-\frac{1}{m\tau+k}+\frac{1}{m\tau-k}\right)=0,
\end{aligned}$$

da sich die anderen Terme abwechselnd wegheben. Andererseits hat man auch

$$\begin{aligned}
\tau\cdot\sum_{m\geq 1} B_{mn} &= \tau\cdot\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m\tau+n-1}-\frac{1}{m\tau+n}+\frac{1}{m\tau-n}-\frac{1}{m\tau-n+1}\right)\\
&= \sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m+\frac{n-1}{\tau}}-\frac{1}{m+\frac{n}{\tau}}+\frac{1}{m-\frac{n}{\tau}}-\frac{1}{m-\frac{n+1}{\tau}}\right)\\
&= \sum_{m\geq 1}\left(\frac{-2\frac{n-1}{\tau}}{m^2-\left(\frac{n-1}{\tau}\right)^2}+\frac{2\frac{n}{\tau}}{m^2-\left(\frac{n}{\tau}\right)^2}\right)\\
&= \sum_{m\geq 1}\left(\frac{2\frac{n-1}{\tau}}{\left(\frac{n-1}{\tau}\right)^2-m^2}-\frac{2\frac{n}{\tau}}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^2-m^2}\right)\\
&= \varphi(n-1)-\varphi(n)
\end{aligned}$$

mit

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}\pi\cot(\pi\xi/\tau)-\frac{1}{\xi/\tau} & \text{für } \xi\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{für } \xi=0\end{cases}$$

wegen der Partialbruchzerlegung des Cotangens und $\xi/\tau\notin\mathbb{Z}$ für $\xi\in\mathbb{N}$ (vgl. (1)). Setzt man diese Ergebnisse jetzt in (6) ein, kommt man auf

$$\begin{aligned}
\tau \cdot F(\tau) &= \tau \cdot \left(\sum_{m\geq 1} \sum_{n \geq 1} B_{mn} - \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} B_{mn} \right) = -\tau \cdot \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 1} B_{mn} \\
&= - \sum_{n\geq 1} \left(\tau \cdot \sum_{m\geq 1} B_{mn} \right) = - \sum_{n\geq 1} \left(\varphi(n-1) - \varphi(n) \right) \\
&= -\varphi(0) + \lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\pi \cot\left(\frac{\pi n}{\tau} \right) - \frac{\tau}{n} \right) \\
&= (***) .
\end{aligned}$$

Um den Grenzwert zu bestimmen hilft es, den Cotangens mit Hilfe der Exponentialfunktion umzuschreiben. Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned}
\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(e^{iz} + e^{-iz} \right)}{\frac{1}{2i} \cdot \left(e^{iz} - e^{-iz} \right)} = i \left(\frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}} \right) \\
&= i \left(\frac{e^{ix-y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}} + \frac{e^{-ix+y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}} \right) \\
&= i \left(\frac{e^{-ix+y}}{e^{-ix+y}} \cdot \frac{e^{ix-y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}} + \frac{e^{ix-y}}{e^{ix-y}} \cdot \frac{e^{-ix+y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}} \right) \\
&= i \left(\frac{1}{1 - e^{-2ix+2y}} + \frac{1}{e^{2ix-2y} - 1} \right) \stackrel{y\to-\infty}{\longrightarrow} i.
\end{aligned}$$

Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt $\operatorname{Im} \frac{1}{\tau} < 0$ und somit $\operatorname{Im} \frac{\pi n}{\tau} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Beachtet man noch, dass $|e^{2ix}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhält man aus obiger Nebenrechnung mit Hilfe der Grenzwertsätze $(***) = \pi i - 0 = \pi i$, also $\tau F(\tau) = \pi i$, was nach (5) genau die Behauptung ist. $\square$

§2 Das Transformationsverhalten von η

In diesem Abschnitt wird die Dedekindsche Eta-Funktion eingeführt und erste Aussagen über deren Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen werden gemacht.

(2.1) Definition
Nach R. Dedekind definiert man $\eta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ durch

$$\eta(\tau) := e^{\pi i \tau/12} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m \tau}\right). \tag{7}$$

◇

Die Wohldefiniertheit wird im Beweis der folgenden Bemerkung gezeigt.

(2.2) Bemerkung
Die Dedekindsche *η-Funktion* ist holomorph und es gilt offenbar

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12} \cdot \eta(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}. \tag{8}$$

Außerdem ist das Produkt absolut lokal gleichmäßig konvergent und man hat

$$\eta(\tau) \neq 0 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}. \tag{9}$$

Beweis
Nach [A. Krieg] XXVI (3.8) ist für die absolut lokal gleichmäßige Konvergenz des Produkts zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m \tau} - 1\right)$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert. Für $\tau = x + iy$ gilt $y > 0$ und somit

$$\sum_{m=1}^{\infty} |1 - e^{2\pi i m \tau} - 1| = \sum_{m=1}^{\infty} |e^{2\pi i m \tau}| = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi m y} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{-2\pi y}\right)^m < \infty$$

als geometrische Reihe wegen $|e^{-2\pi y}| < 1$.

Da $y \mapsto e^{-2\pi y}$ holomorph ist, bekommt man mit dem Weierstrassschen Majorantenkriterium die absolut gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum K aus $\mathbb{H}$, also die absolut lokal gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{H}$. Die Holomorphie des Produkts und damit von η bekommt man jetzt mit [A. Krieg] XXVI (3.10).

Nach [A. Krieg] XXVI (3.2) folgt aus der Konvergenz des Produkts

$$0 = \eta\left(\tau\right) = e^{\pi i/12} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m\tau}\right) \Leftrightarrow 1 - e^{2\pi i m\tau} = 0 \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Da aber $y > 0$ ist, gilt $|e^{2\pi i m\tau}| = e^{-2\pi m y} < 1$ und somit (9). □

Eine weitere Aussage über das Transformationsverhalten liefert uns der folgende

(2.3) Satz
Es gilt

$$\eta\left(-1/\tau\right) = \sqrt{\tau/i} \cdot \eta\left(\tau\right) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv wird. ◇

Beweis
Für $\tau \in \mathbb{H}$ betrachte man die Funktion $f\left(\tau\right) := \eta'\left(\tau\right)/\eta\left(\tau\right)$, also die logarithmische Ableitung von η. Da $\mathbb{H}$ ein Gebiet ist, $\tau \mapsto 1 - e^{2\pi m\tau}$ ganz ist und das Produkt aus (7) absolut lokal gleichmäßig konvergiert, gilt nach [A. Krieg] XXVI (3.12)

$$\begin{aligned}
f\left(\tau\right) &= \frac{\frac{\pi i}{12} \cdot e^{\pi i\tau/12}}{e^{\pi i\tau/12}} + \sum_{m\geq 1} \frac{-2\pi i m \cdot e^{2\pi i m\tau}}{1 - e^{2\pi i m\tau}} \\
&= \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1} \frac{m \cdot e^{2\pi i m\tau}}{1 - e^{2\pi i m\tau}}\right) \qquad (10) \\
&= \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1} \left(m \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{2\pi i m\tau}} - 1\right)\right)\right) \\
&\overset{|e^{2\pi i m\tau}|<1}{=} \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1} \left(m \cdot \left(\sum_{r\geq 0} \left(e^{2\pi i m\tau}\right)^r - 1\right)\right)\right) \\
&= \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1} m \cdot \sum_{r\geq 1} e^{2\pi i m\tau r}\right) \\
&\overset{\text{vgl. Beweis zu (1.4)}}{=} \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{n\geq 1} \sigma_1\left(n\right) e^{2\pi i n\tau}\right) \\
&= \frac{\pi i}{12} \cdot \frac{3}{\pi^2} \cdot G_2\left(\tau\right) = \frac{i}{4\pi} \cdot G_2\left(\tau\right),
\end{aligned}$$

wenn man Proposition (1.4) anwendet. Setzt man $G_2(\tau) = \frac{4\pi}{i} \cdot f(\tau)$ in Satz (1.5b) ein, so übersetzt sich dieser zu

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\tau^2} - f(\tau) - \frac{1}{2\tau} = 0, \tag{11}$$

denn

$$\begin{aligned} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 \cdot G_2(\tau) - 2\pi i\tau \Leftrightarrow\ & \frac{4\pi}{i} \cdot f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 \cdot \frac{4\pi}{i} \cdot f(\tau) - 2\pi i\tau \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4\pi}{i} \cdot \left(f\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \tau^2 \cdot f(\tau) + \frac{i^2\tau}{2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \tau^2 \cdot f(\tau) + \frac{i^2\tau}{2} = 0 \\ \overset{\tau\neq 0}{\Leftrightarrow}\ & f\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\tau^2} - f(\tau) - \frac{1}{2\tau} = 0. \end{aligned}$$

Nun definiert man

$$g(z) := \frac{\eta(i/z)}{\eta(iz)\sqrt{z}} \quad \text{für alle } z \in -i \cdot \mathbb{H}, \text{ also } v \in \mathbb{R} \text{ und } y > 0 \text{ für } z = y + iv,$$

wobei $\sqrt{z}$ den Zweig der Wurzel bezeichne, der für positive Argumente selbst positiv ist. Dann ist g holomorph auf $-i \cdot \mathbb{H}$ und wegen (9) konvergiert neben $e^{\pi ii/z/12} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi imi/z}\right) = \eta(i/z)$ auch $e^{-\pi iiz/12} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{2\pi imiz}} = \frac{1}{\eta(iz)}$, und es gilt

$$\frac{\eta(i/z)}{\eta(iz)} = \frac{e^{-\pi/12z}}{e^{-\pi z/12}} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\pi m/z}}{1 - e^{-2\pi mz}}.$$

Das Produkt konvergiert absolut lokal gleichmäßig auf $-i \cdot \mathbb{H}$, da

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-2\pi m/z}}{1 - e^{-2\pi mz}} - 1 \right| &= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-2\pi mz} - e^{-2\pi m/z}}{1 - e^{-2\pi mz}} \right| \leq \sum_{m\geq 1} \frac{|e^{-2\pi mz}| + |e^{-2\pi m/z}|}{1 - |e^{-2\pi mz}|} \\ &\leq \begin{cases} 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi my}}{1-e^{-2\pi my}} \leq 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} e^{-2\pi myr}, & \text{falls } y \leq 1, \\ 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi m/y}}{1-e^{-2\pi m/y}} \leq 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} e^{-2\pi mr/y}, & \text{falls } y > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

und die Reihen nach dem Beweis von Hilfssatz (1.3) absolut lokal gleichmäßig konvergieren.

Damit gilt nach [A. Krieg] XXVI (3.12) für die logarithmische Ableitung

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{y}}\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}\right)^2} + \frac{\frac{\frac{\pi}{12y^2}\cdot e^{-\frac{\pi}{12y}}e^{-\frac{\pi y}{12}} - \left(-\frac{\pi}{12}\cdot e^{-\frac{\pi y}{12}}e^{-\frac{\pi}{12y}}\right)}{\left(e^{-\frac{\pi y}{12}}\right)^2}}{\frac{e^{-\frac{\pi}{12y}}}{e^{-\frac{\pi y}{12}}}}$$

$$+\sum_{m\geq 1}\frac{\frac{-\frac{2\pi m}{y^2}\cdot e^{-\frac{2\pi m}{y}}\cdot\left(1-e^{-2\pi m y}\right)-2\pi m\cdot e^{-2\pi m y}\cdot\left(1-e^{-\frac{2\pi m}{y}}\right)}{\left(1-e^{-2\pi m y}\right)^2}}{\frac{1-e^{-\frac{2\pi m}{y}}}{1-e^{-2\pi m y}}}$$

$$= \frac{\pi}{12y^2} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2y} + \sum_{m\geq 1}\left(\frac{-\frac{2\pi m}{y^2}\cdot e^{-\frac{2\pi m}{y}}}{1-e^{-\frac{2\pi m}{y}}} - \frac{2\pi m\cdot e^{-2\pi m y}}{1-e^{-2\pi m y}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12y^2} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2y} - \frac{2\pi}{y^2}\cdot\sum_{m\geq 1} m\cdot\frac{e^{-\frac{2\pi m}{y}}}{1-e^{-\frac{2\pi m}{y}}} - 2\pi\cdot\sum_{m\geq 1} m\cdot\frac{e^{-2\pi m y}}{1-e^{-2\pi m y}},$$

da die beiden Reihen nach dem Beweis von Hilfssatz (1.3) konvergieren. Klammert man geschickt aus, erhält man

$$-\frac{i}{y^2}\cdot\frac{\pi i}{12}\cdot\left(1-24\cdot\sum_{m\geq 1} m\cdot\frac{e^{-\frac{2\pi m}{y}}}{1-e^{-\frac{2\pi m}{y}}}\right)$$

$$-i\cdot\frac{\pi i}{12}\cdot\left(1-24\cdot\sum_{m\geq 1} m\cdot\frac{e^{-2\pi m y}}{1-e^{-2\pi m y}}\right) - \frac{1}{2y}$$

$$= -\frac{i}{y^2}\cdot f\left(\frac{i}{y}\right) - i\cdot f(iy) - \frac{1}{2y} = i\cdot\left(\frac{1}{(iy)^2}\cdot f\left(\frac{i}{y}\right) - f(iy) - \frac{1}{2yi}\right)$$

$$= i\cdot 0 = 0,$$

wenn man zuerst (10) und dann (11) verwendet. Insbesondere gilt also $g'(y) = 0$ für alle $y > 0$. Da g und somit auch g' auf $-i\cdot\mathbb{H}$ holomorph sind folgt $g'(z) = 0$ für alle $z \in -i\cdot\mathbb{H}$, also existiert eine Konstante γ mit $g(z) = \gamma$ für alle $z \in -i\cdot\mathbb{H}$. Wegen der Definition von g gilt demnach

$$\eta\left(i/y\right) = \gamma \cdot \sqrt{y} \cdot \eta\left(iy\right) \quad \text{für alle } y > 0,$$

also mit dem Identitätssatz

$$\begin{aligned} & \eta\left(i/z\right) = \gamma \cdot \sqrt{z} \cdot \eta\left(iz\right) \quad \text{für alle } z \in -i \cdot \mathbb{H} \\ \Leftrightarrow\ & \eta\left(-1/\left(iz\right)\right) = \gamma \cdot \sqrt{-i^2 z} \cdot \eta\left(iz\right) \quad \text{für alle } z \in -i \cdot \mathbb{H} \\ \Leftrightarrow\ & \eta\left(-1/\tau\right) = \gamma \cdot \sqrt{-i\tau} \cdot \eta\left(\tau\right) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Für $\tau = i$ folgt $\gamma = 1$ und somit die Behauptung. □

(2.4) Satz
Es gilt $\eta^{24} = \Delta^*$.

Dabei bezeichne Δ^* die normierte Diskriminante. ◇

Beweis
Mit η ist auch $f := \eta^{24}$ auf $\mathbb{H}$ holomorph. Wegen (7) gilt

$$f\left(\tau\right) = e^{2\pi i\tau} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m\tau}\right)^{24} = e^{2\pi i\tau} + \cdots, \tag{12}$$

so dass f in eine Fourier-Reihe $f\left(\tau\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f\left(m\right) e^{2\pi i m\tau}$ mit $\alpha_f\left(0\right) = 0$ und $\alpha_f\left(1\right) = 1$ entwickelbar ist. Seien weiter

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} \left(f|_{12}T\right)\left(\tau\right) &= \left(0+1\right)^{-12} \cdot f\left(\frac{1\tau+1}{0\tau+1}\right) = f\left(\tau+1\right) \\ &= \eta^{24}\left(\tau+1\right) \overset{(8)}{=} \left(e^{\pi i/12} \cdot \eta\left(\tau\right)\right)^{24} \\ &= f\left(\tau\right), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(f|_{12}J)(\tau) &= (\tau+0)^{-12}\cdot f\left(\frac{0\tau-1}{1\tau+0}\right) = \tau^{-12}\cdot f\left(-\frac{1}{\tau}\right)\\ &= \tau^{-12}\cdot\eta^{24}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \overset{(2.3)}{=} \tau^{-12}\cdot\left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\cdot\eta(\tau)\right)^{24}\\ &= \tau^{-12}\tau^{12}(-i)^{12}\cdot f(\tau) = f(\tau).\end{aligned}$$

Da die Modulgruppe Γ von J und T erzeugt wird, gilt damit $f|_{12}M = f$ für alle $M \in \Gamma$. Daher ist $f \in \mathbb{S}_{12}$ eine Spitzenform von Gewicht 12. Da Δ^* eine Darstellung als FOURIER-Reihe der Form $\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)\cdot e^{2\pi i m\tau}$ mit $\tau(1) = 1$ besitzt, und nach [A. KRIEG] XXIX(4.5) $\mathbb{S}_{12} = \mathbb{C}\cdot\Delta^*$ gilt, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Darstellung als FOURIER-Reihe. □

Damit ergibt (12) einen neuen Beweis für die Produktentwicklung von Δ. Zusammengefasst wird das in dem

(2.5) Korollar
Es gilt

$$\Delta^*(\tau) = e^{2\pi i\tau}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m\tau}\right)^{24} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

◇

(2.6) Bemerkung
Vergleicht man die klassische Theta-Reihe mit der Eta-Funktion, so erhält man für

$$\psi(\tau) := \vartheta(\tau)/\eta(\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}$$

folgendes Transformationsverhalten:

$$\vartheta(M\tau) = v(M)\cdot\vartheta(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma_\vartheta$$

mit einer 12. Einheitswurzel $v(M)$. Zur Definition von Γ_ϑ vergleiche man [A. KRIEG] XXVII (3.8). ◇

Beweis
Nach (9) ist ψ holomorph und wegen der Theta-Transformationsformel und Satz (2.3) gilt $\psi(-1/\tau) = \psi(\tau)$. Weiterhin gilt mit (8) und $\vartheta(\tau+2) = \vartheta(\tau)$ auch

$$\psi(\tau+2) = \frac{\vartheta(\tau+2)}{\eta(\tau+2)} = \frac{\vartheta(\tau)}{e^{\pi i/6} \cdot \eta(\tau)} = e^{-\pi i/6} \cdot \psi(\tau).$$

Da Γ_ϑ von J und T^2 erzeugt wird, wobei J, T wie in (2.4) definiert sind, folgt die Behauptung. $\square$

§3 Das allgemeine Transformationsverhalten von η

R. Dedekind hat in seinen *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von* Riemann bereits das Transformationsverhalten von $\log \eta(\tau)$ unter beliebigen Modulsubstitutionen bestimmt. Man findet eine moderne Darstellung z.B. bei [J. Lehner] 338–344. Eine zentrale Rolle spielt dabei die so genannte Dedkindsche Summe $s(h, k)$, die für teilerfremde ganze Zahlen h, k mit $k > 0$ definiert ist durch

$$s(h, k) := \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{r}{k} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{rh}{k} - \left[\frac{rh}{k} \right] - \frac{1}{2} \right).$$

Man formuliert das allgemeine Transformationsverhalten von η als den

(3.1) Satz (Satz von Dedekind)
Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ mit $c > 0$ gilt

$$\eta(M\tau) = v(M) \cdot \sqrt{\frac{c\tau + d}{i}} \cdot \eta(\tau) \quad \text{mit} \quad v(M) := e^{\pi i \left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c) - \frac{1}{4} \right)}. \qquad \diamond$$

Einen Beweis findet man zum Beispiel bei [J. Lehner] 338–344 oder [T.M. Apostol] Theorem 3.4.

§4 Sonstiges

Für $\tau \in \mathbb{H}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ ist die Reihe

$$G(\tau; s) := \sum_{m,n}{}' \underbrace{(m\tau + n)^{-2} \cdot |m\tau + n|^{-s}}_{(*)}$$

absolut lokal gleichmäßig konvergent, denn nach [A. Krieg] XXIX (2.1) existiert eine positive Konstante c mit

$$|*| = |m\tau + n|^{-2-\operatorname{Re} s} \leq c \cdot |mi + n|^{-2-\operatorname{Re} s} = c \cdot \left(m^2 + n^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot(-2-\operatorname{Re} s)}.$$

[A. Krieg] XXIX (2.2) und das Weierstrasssche Majorantenkriterium liefern jetzt das Gewünschte. Da $(*)$ für festes $\tau \in \mathbb{H}$ holomorph in s ist für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$, ist die Reihe $G(\tau; s)$ nach dem Satz von Weierstrass holomorph in s. In τ hingegen ist sie nicht holomorph. Einige Eigenschaften von $G(\tau; s)$ beinhaltet der folgende

(4.1) Satz

a) Bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ ist $G(\tau; s)$ als ganze Funktion in die s-Ebene fortsetzbar.

b) Es gilt
$$G(\tau; 0) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{\operatorname{Im} \tau} - 8\pi^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sigma_1(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

c) Für jedes $M \in \Gamma$ gilt $G(\tau; 0)\,|_2 M = G(\tau; 0)$. ◇

Für einen Beweis vergleiche man [B. Schoenenberg] 63–68, oder [T. Miyake] § 7.2.

Literatur

[T.M. APOSTOL] *Modular functions and Dirichlet series in number theory.*
2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1990.

[J. LEHNER] *Discontinous groups and automorphic functions.*
Math. Surv. Monogr. **VIII**, Amer. Math. Soc., Providence 1964.

[A. KRIEG] *Skript zur höheren Funktionentheorie I.*

[B. SCHOENENBERG] *Elliptic modular functions.*
Grundl. math. Wiss. 203, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

[T. MIYAKE] *Modular forms.*
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1989.