Untergruppen der Modulgruppe II

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 23.04.2008

Judith Kreuzer

In diesem Vortrag wollen wir uns im Wesentlichen mit einer speziellen Art der Untergruppen der Modulgruppe beschäftigen – den Kongruenzgruppen.

Dazu betrachten wir zunächst die Untergruppe $\Gamma_0[n]$, die wir bereits im Vortrag „Untergruppen der Modulgruppe I " kennengelernt haben. Wir werden ein paar Eigenschaften dieser Gruppe herausarbeiten und ihren Fundamentalbereich betrachten.

Im zweiten Abschnitt befassen wir uns mit den Kongruenzgruppen der Stufe 2. Hierbei werden wir verschiedene Untergruppen der Modulgruppe sowie ihre Darstellung in Nebenklassen über $\Gamma[2]$ kennenlernen.

§1 Die Untergruppe $\Gamma_0[n]$

In diesem Abschnitt werden wir uns noch einmal kurz mit der Gruppe $\Gamma_0[n]$ beschäftigen. Insbesondere wird der Fundamentalbereich dieser Gruppe betrachtet.

— *Definition und Hilfssätze* —

(1.1) Definition ($\boldsymbol{\Gamma_0[n]}$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Gamma_0[n]$ definiert als die Menge aller Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in Γ, für die $c \equiv 0 \pmod n$ gilt. Das heißt,

$$\Gamma_0[n] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod n \right\}. \qquad \diamond$$

Der Begriff aus (1.1) führt uns sofort zu folgender Aussage.

(1.2) Lemma
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Gamma_0[n]$ eine Untergruppe von Γ. $\diamond$

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $\Gamma_0[n]$ eine Teilmenge von Γ und die Einheitsmatrix ist in dieser Menge. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0[n]$ ist $M^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ ebenfalls in $\Gamma_0[n]$, denn mit $c \equiv 0 \pmod n$ ist auch $-c \equiv 0 \pmod n$. $\square$

(1.3) Satz
Seien $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein Erzeugendensystem der Gruppe Γ, und sei p eine Primzahl. Dann existiert für jedes $L \in \Gamma$ mit $L \notin \Gamma_0[p]$, eine Matrix P in $\Gamma_0[p]$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k < p$, so dass

$$L = PJT^k. \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $L = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ mit $\gamma \not\equiv 0 \pmod p$ gegeben. Gesucht ist eine Matrix $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $c \equiv 0 \pmod p$ und eine ganze Zahl k mit $0 \leq k < p$, so dass

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = PJT^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

Da alle Matrizen invertierbar sind, ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha k - \beta & \alpha \\ \gamma k - \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

Wähle also k so, dass $\gamma k \equiv \delta \pmod p$ für alle $0 \leq k < p$ gilt. Dies ist möglich, da $\gamma \not\equiv 0 \pmod p$ gilt. Nun setzen wir

$$c = k\gamma - \delta, \quad a = \alpha k - \beta, \quad b = \alpha \quad \text{und} \quad d = \gamma.$$

Damit ist $c \equiv 0 \pmod p$. Weiter ist $P \in \Gamma$, da $L = PJT^k$ gilt mit L, J und $T \in \Gamma$. Insgesamt folgt also $P \in \Gamma_0[p]$. $\square$

— *Der Fundamentalbereich von* $\Gamma_0[n]$ —

In diesem Abschnitt befassen wir uns nun mit dem Fundamentalbereich von $\Gamma_0[n]$. Hierbei verwenden wir die üblichen Bezeichnungen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den zugehörigen Abbildungen $J : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ und $T : \tau \mapsto \tau + 1$. Weiter bezeichnen wir den Fundamentalbereich von Γ mit $\mathbb{F}$.

(1.4) Definition
Sei Λ eine Untergruppe von Γ. Zwei Punkte $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ heißen genau dann *äquivalent* unter Λ, wenn es ein $A \in \Lambda$ gibt mit $\tau' = A\tau$. $\diamond$

(1.5) Definition (Fundamentalbereich einer Untergruppe)
Sei Λ eine Untergruppe von Γ. Eine offene Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt ein *offener Fundamentalbereich* von Λ, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

(i) Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ existiert ein $\tau' \in \overline{\mathcal{F}}$, so dass τ' und τ äquivalent unter Λ sind.

(ii) Es gibt keine zwei verschiedenen Punkte in $\mathcal{F}$, die unter Λ äquivalent sind. $\diamond$

(1.6) Satz
Für jede Primzahl p ist die Menge $\mathring{\mathbb{F}} \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} JT^k(\mathring{\mathbb{F}})$ ein Fundamentalbereich der Untergruppe $\Gamma_0[p]$. $\diamond$

Beweis
Sei $\mathcal{F} := \mathring{\mathbb{F}} \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} JT^k(\mathring{\mathbb{F}})$. Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

(i) Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ existiert ein $L \in \Gamma_0[p]$, so dass $L\tau$ im Abschluss von $\mathcal{F}$ liegt.

(ii) Es gibt keine zwei verschiedenen Punkte in $\mathcal{F}$, die äquivalent unter $\Gamma_0[p]$ sind.

ad (i): Sei $\tau \in \mathbb{H}$ und $\tau_1 \in \overline{\mathbb{F}}$ sowie $M \in \Gamma$, so dass $M\tau = \tau_1$ gilt (existiert nach Satz XXVIII(2.6)). Nach (1.3) können wir M^{-1} schreiben als $M^{-1} = PN$, wobei $P \in \Gamma_0[p]$ und $N = E$ oder $N = JT^k$ für ein $0 \leq k \leq p-1$ gilt. Dann gilt

$$P = M^{-1}N^{-1} \quad \text{und} \quad P^{-1} = NM.$$

Sei nun $L = P^{-1}$. Dann ist $L \in \Gamma_0[p]$ und

$$L\tau = NM\tau = N\tau_1.$$

Da $N = E$ oder $N = JT^k$ gilt, folgt die Aussage (i).

ad (ii): Seien $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}$ und $L\tau_1 = \tau_2$ für ein $L \in \Gamma_0[p]$. Wir wollen zeigen, dass $\tau_1 = \tau_2$ ist. Dazu betrachten wir drei Fälle:

1. Fall: Es ist $\tau_1 \in \mathring{\mathbb{F}}$ und $\tau_2 \in \mathring{\mathbb{F}}$. Da $L \in \Gamma$, gilt dann mit XXVIII(2.6):

$$\tau_1 = L\tau_1 = \tau_2$$

2. Fall: Es ist $\tau_1 \in \mathring{\mathbb{F}}$ und $\tau_2 \in JT^k(\mathring{\mathbb{F}})$. Dann existiert ein $\tau_3 \in \mathring{\mathbb{F}}$ mit $\tau_2 = JT^k\tau_3$. Aus $L\tau_1 = \tau_2$ folgt

$$L\tau_1 = JT^k\tau_3 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_1 = L^{-1}JT^k\tau_3.$$

Da $\tau_1 \in \mathring{\mathbb{F}}$ und $\tau_3 \in \mathring{\mathbb{F}}$ und $L^{-1}JT^k \in \Gamma$ gilt, folgt wie im ersten Fall $\tau_1 = \tau_3$, also $L^{-1}JT^k = E$. Somit gilt:

$$L = JT^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu $L \in \Gamma_0[p]$.

3. Fall: Es ist $\tau_1 \in JT^{k_1}(\mathring{\mathbb{F}})$ und $\tau_2 \in JT^{k_2}(\mathring{\mathbb{F}})$. Dann gibt es $\tau_1' \in \mathring{\mathbb{F}}$ und $\tau_2' \in \mathring{\mathbb{F}}$ mit

$$\tau_1 = JT^{k_1}\tau_1' \text{ und } \tau_2 = JT^{k_2}\tau_2'.$$

Aus $L\tau_1 = \tau_2$ folgt $LJT^{k_1}\tau_1' = JT^{k_2}\tau_2'$ und somit wie im zweiten Fall $LJT^{k_1} = JT^{k_2}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} L &= JT^{k_2-k1}J^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_2-k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1-k_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_1-k_2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $L \in \Gamma_0[p]$ gilt, ist $k_1 \equiv k_2 \pmod p$. Hieraus folgt direkt $k_1 = k_2$, da $0 \leq k_1, k_2 < p$. Wir erhalten also $L = JT^0J^{-1} = JJ^{-1} = E$ und daraus $\tau_1 = \tau_2$.

Aus (i) und (ii) folgt nun die Behauptung. □

Der folgende Satz gibt Aufschluss über die Erzeuger von $\Gamma_0[p]$. Da wir ihn im weiteren Verlauf allerdings nicht nochmal verwenden, wird der Beweis an dieser Stelle ausgelassen.

(1.7) Satz (Erzeuger von $\Gamma_0[p]$)
Für jede Primzahl $p > 3$ hat die Untergruppe $\Gamma_0[p]$ von Γ genau $2[\frac{p}{12}] + 3$ Erzeuger. Diese können aus der Menge

$$\{T, V_1, V_2, \ldots, V_{p-1}\}$$

gewählt werden, wobei $T\tau = \tau + 1, J\tau = -\frac{1}{\tau}$ und

$$V_k = JT^kJT^{-k'}J = \begin{pmatrix} k' & 1 \\ -(kk'+1) & -k \end{pmatrix} \quad \text{mit } kk' \equiv -1 \pmod p.$$

Die Untergruppe $\Gamma_0[2]$ wird von T und V_1 erzeugt; die Untergruppe $\Gamma_0[3]$ hat die Erzeuger T und V_2. ◇

In der folgenden Tabelle sind die Erzeuger von $\Gamma_0[p]$ für alle Primzahlen $p \leq 20$ aufgeführt.

p	2	3	5	7	11	13	17	19
Erzeuger:	T	T	T	T	T	T	T	T
	V_1	V_2	V_2	V_3	V_4	V_4	V_4	V_5
			V_3	V_5	V_6	V_5	V_7	V_8
						V_8	V_9	V_{12}
						V_{10}	V_{13}	V_{13}

§2 Die Kongruenzgruppen der Stufe 2

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Kongruenzgruppen der Stufe 2. Wir werden Kongruenzgruppen mit verschiedenem Index in Γ sowie Normalteiler von Γ kennenlernen. Dabei legen wir immer wieder Wert auf die Darstellung in Nebenklassenvertretern.

— *Die Kongruenzgruppe* $\Gamma[2]$ —

Zunächst wollen wir die Definition der Kongruenzgruppe wiederholen.

(2.1) Definition (Kongruenzgruppe)
Sei Λ eine Untergruppe von Γ. Man nennt Λ eine *Kongruenzgruppe*, wenn es ein $n \geq 1$ gibt mit $\Gamma[n] \subseteq \Lambda$.

Das kleinste derartige n heißt *Stufe* von Λ. ◇

(2.2) Bemerkung
a) Jede Kongruenzuntergruppe von Γ hat endlichen Index in Γ.

b) Die Kongruenzgruppen der Stufe 2 sind genau die echten Untergruppen von Γ, die $\Gamma[2]$ enthalten. ◇

(2.3) Satz
(i) $\Gamma/\Gamma[2]$ ist isomorph zur Permutationsgruppe S_3.

(ii) $\Gamma[2]$ wird erzeugt von den Matrizen $-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $JT^2J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ◇

Beweis

(i) Wie wir im Vortrag „Untergruppen der Modulgruppe I" gesehen haben, ist $\Gamma/\Gamma[2] \cong \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Sei $V := \{(\begin{smallmatrix}\bar{1}\\ \bar{0}\end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix}\bar{1}\\ \bar{1}\end{smallmatrix})\} \subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : \Gamma/\Gamma[2] \longrightarrow \mathrm{Sym(V)}\,,\; M\Gamma[2] \mapsto (V \longrightarrow V, v \mapsto Mv)$$

Dann ist ϕ injektiv, denn die Nebenklassenvertreter von $\Gamma[2]$ in Γ permutieren die Elemente von V auf die folgende Weise:

$$\phi(E) = id, \quad \phi(T) = (2,3), \quad \phi(-UT) = (1,3),$$
$$\phi(J) = (1,2), \quad \phi(U) = (1,3,2), \quad \phi(U^2) = (1,2,3)$$

Weiter ist ϕ surjektiv, da beide Gruppen die Ordnung sechs haben. Offenbar ist ϕ ein Homomorphismus.

(ii) Wir brauchen nur eine Inklusion zu zeigen. Sei also $\Lambda := \langle -E, T^2, JT^2J^{-1}\rangle$ eine Untergruppe von $\Gamma[2]$ und sei $M \in \Gamma[2]$. Es ist

$$T^{2m}M = \begin{pmatrix}1 & 2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2mc & b+2md\\ c & d\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}(JT^2J^{-1})^m M &= \left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]^m M\\ &= \left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]^m M\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}^m M\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a & b\\ -2am+c & -2bm+d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$, also gibt es ein $L_1 \in \Lambda$ mit

$$L_1M = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |a_1| \leq |c_1|, \text{ falls } c \neq 0.$$

Da $L_1M \in \Gamma[2]$ gilt und somit a_1 ungerade und c_1 gerade ist, folgt sogar $|a_1| < |c_1|$.

Analog kann man, falls $a_2 \neq 0$ gilt, ein $L_2 \in \Lambda$ bestimmen, so dass

$$L_2 M = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |c_2| < |a_2|.$$

Nach endlich vielen Schritten findet man ein $L \in \Lambda$ mit $LM = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $r \in \mathbb{Z}$. Wegen $LM \in \Gamma[2]$ ist r gerade und $LM = \pm T^r \in \Lambda$, also $M \in \Lambda$. □

(2.4) Korollar
Die Untergruppen von Γ, die $\Gamma[2]$ enthalten, stehen in Bijektion zu den Untergruppen von $\Gamma/\Gamma[2]$, also von S_3. ◇

Beweis
Wir wissen aus dem Vortrag „Untergruppen der Modulgruppe I", dass $\Gamma[2]$ ein Normalteiler in Γ ist. Nach der Vorlesung „Algebra I" gibt es eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen $\{U \leq \Gamma \mid \Gamma[2] \subseteq U\}$ und $\{X \leq \Gamma/\Gamma[2]\}$. □

(2.5) Bemerkung
Die trivialen Untergruppen von S_3 entsprechen nach obigem Korollar $\Gamma[2]$ und Γ.

Die Gruppe S_3 besitzt drei Untergruppen der Ordnung 2. Diese entsprechen den Kongruenzgruppen

$$\Gamma_0[2],\ \Gamma^0[2] \text{ und } \Gamma_\vartheta := \Gamma[2] \cup \Gamma[2] \cdot J.$$ ◇

Beweis
Der Index von Γ_ϑ in $\Gamma[2]$ ist offenbar 2. Wir werden später sehen, dass Γ_ϑ tatsächlich eine Gruppe ist.

Nach dem Vortrag „Untergruppen der Modulgruppe I" gilt:

$$[\Gamma : \Gamma[2]] = 2^3 \prod_{p|2} (1 - p^{-2}) = 2^3(1 - \tfrac{1}{4}) = 6$$

Weiterhin gilt

$$[\Gamma : \Gamma[2]] = [\Gamma : \Gamma_0[2]] \cdot [\Gamma_0[2] : \Gamma[2]] = 3 \cdot [\Gamma_0[2] : \Gamma[2]]$$

Nun folgt $[\Gamma_0[2] : \Gamma[2]] = 2$. Analog zeigt man dies für $\Gamma^0[2]$. □

— *Kongruenzgruppen in* $\Gamma[2]$ —

(2.6) Definition (Theta-Gruppe)
Die *Theta-Gruppe* ist definiert durch $\Gamma_\vartheta := \Gamma[2] \cup \Gamma[2] \cdot J$. $\diamond$

(2.7) Lemma
Sei $M \in \Gamma$. Es ist $M \in \Gamma_\vartheta$ genau dann, wenn

$$M \equiv E \pmod 2 \quad \text{oder} \quad M \equiv J \pmod 2.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$a+b+c+d \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{für} M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma. \qquad \diamond$$

Beweis
Die erste Aussage ist nach der Definition der Theta-Gruppe (2.6) klar. Wir wollen nur den Zusatz beweisen.

„$\Rightarrow$“: Falls $M \equiv E \pmod 2$ gilt, so hat M die Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit a, d ungerade und b, c gerade. Dann gilt

$$a+b+c+d \equiv \underbrace{(a+d)}_{\text{gerade}} + \underbrace{(b+c)}_{\text{gerade}} \equiv 0 \pmod 2.$$

Falls $M \equiv J \pmod 2$ gilt, so hat M die Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit a, d gerade und b, c ungerade. Dann gilt

$$a+b+c+d \equiv \underbrace{(a+d)}_{\text{gerade}} + \underbrace{(b+c)}_{\text{gerade}} \equiv 0 \pmod 2.$$

„$\Leftarrow$“: Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ mit $a+b+c+d \equiv 0 \pmod 2$. Dann ist weiterhin $ad - bc = 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Es gilt $ad \equiv 0 \pmod 2$ und $bc \equiv 1 \pmod 2$. Dann folgt

$$b \equiv c \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } (a \equiv 0 \pmod 2 \text{ oder } d \equiv 0 \pmod 2)\,.$$

Sei nun ohne Einschränkung $a \equiv 0 \pmod 2$. Dann gilt unter Verwednung der Voraussetzungen

$$0 \equiv a+b+c+d \equiv 0+1+1+d \equiv d \pmod 2$$

Woraus $M \equiv J \pmod 2$ folgt.

2. Fall: Es gilt $ad \equiv 1 \pmod 2$ und $bc \equiv 0 \pmod 2$. Dann folgt

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } (b \equiv 0 \pmod 2 \text{ oder } d \equiv 0 \pmod 2)\,.$$

Sei nun ohne Einschränkung $b \equiv 0 \pmod 2$. Dann gilt unter Verwednung der Voraussetzungen

$$0 \equiv a + b + c + d \equiv 1 + 0 + c + 1 \equiv d \pmod 2$$

Woraus $M \equiv E \pmod 2$ folgt. □

(2.8) Satz
Γ_ϑ ist eine Untergruppe von Γ vom Index 3. Es gilt:

$$\Gamma = \Gamma_\vartheta \cup (T \cdot \Gamma_\vartheta) \cup (U^2 \cdot \Gamma_\vartheta) = \Gamma_\vartheta \cup (\Gamma_\vartheta \cdot T) \cup (\Gamma_\vartheta \cdot U).$$

Die Gruppe Γ_ϑ wird von den Matrizen J und T^2 erzeugt. ◇

Beweis
Es gilt

$$6 = [\Gamma : \Gamma[2]] = [\Gamma : \Gamma_\vartheta] \cdot [\Gamma_\vartheta : \Gamma[2]] = [\Gamma : \Gamma_\vartheta] \cdot 2,$$

also hat Γ_ϑ den Index 3 in Γ.

Nach dem Vortrag „Untergruppen der Modulgruppe I“ kennen wir die Vertreter der Nebenklassen von $\Gamma[2]$ in Γ. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma[2] \cup \Gamma[2] \cdot T \cup \Gamma[2] \cdot (-UT) \cup \Gamma[2] \cdot J \cup \Gamma[2] \cdot U \cup \Gamma[2] \cdot U^2 \\
&= \Gamma_\vartheta \cup \Gamma[2] \cdot T \cup \underbrace{\Gamma[2] \cdot (-UT)}_{\overset{(*)}{=}\Gamma[2]\cdot JU} \cup \Gamma[2] \cdot U \cup \Gamma[2] \cdot U^2 \\
&= \Gamma_\vartheta \cup \Gamma_\vartheta \cdot U \cup \Gamma[2] \cdot T \cup \underbrace{\Gamma[2] \cdot U^2}_{\Gamma[2]\cdot JT} \\
&= \Gamma_\vartheta \cup \Gamma_\vartheta \cdot U \cup \Gamma_\vartheta \cdot T.
\end{aligned}$$

Hierbei gilt $(*)$, denn

$$\Gamma[2] \cdot (-UT) = \Gamma[2] \cdot JU \quad \Leftrightarrow \quad (-UT)U^{-1}J^{-1} \in \Gamma[2]$$

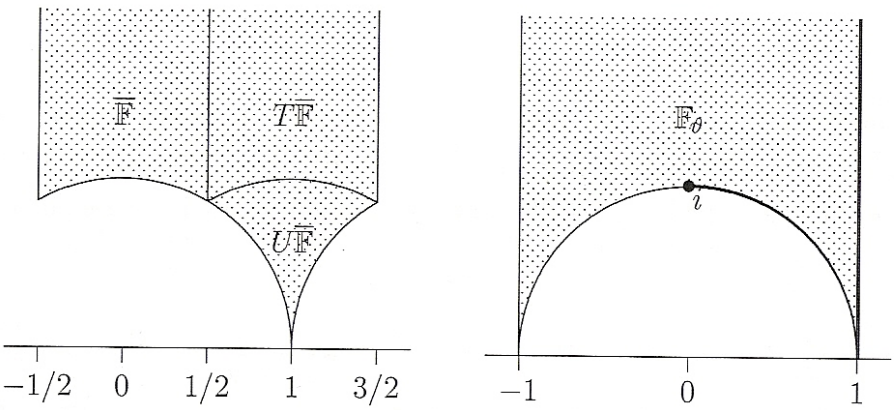
und

$$\begin{aligned}
(-UT)U^{-1}J^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma[2]
\end{aligned}$$

Nach (2.3) und (2.6) wird Γ_ϑ erzeugt von $-E$, T^2, JT^2J^{-1}, $-J$, T^2J und $JT^2J^{-1}J = JT^2$. Mit $J^2 = -E$ und $-J = J^{-1}$ erhalten wir als Erzeuger für Γ_ϑ die Matrizen J und T^2. □

Wir erhalten nun einen Fundamentalbereich von Γ_ϑ durch

$$\mathbb{F}(\Gamma_\vartheta) := \mathring{\mathbb{F}} \cup T\mathring{\mathbb{F}} \cup U\mathring{\mathbb{F}}.$$



Hierbei ist $\mathbb{F}_\vartheta$ ein exakter Fundamentalbereich von Γ_ϑ.

Nun wollen wir noch eine weitere Kongruenzgruppe kennenlernen.

(2.9) Definition
Die S_3 besitzt genau eine Untergruppe der Ordnung 3. Diese entspricht der Kongruenzgruppe

$$\Gamma_N[2] := \Gamma[2] \cup (\Gamma[2] \cdot U) \cup (\Gamma[2] \cdot U^2).$$ ◇

Wir wollen diese Gruppe und ein paar ihrer Eigenschaften näher betrachten. Dazu benötigen wir zunächst folgende Definition.

(2.10) Definition (Abelscher Charakter)
Sei Λ eine Untergruppe von Γ. Jeder Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \Lambda \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

heißt ein *abelscher Charakter* von Λ. ◇

(2.11) Satz
Der einzige Normalteiler von Γ vom Index 2 ist $\Gamma_N[2]$. Ein Erzeugendensystem von $\Gamma_N[2]$ bilden die Matrizen T^2 und $-U$ und es gilt

$$\Gamma = \Gamma_N[2] \cup \Gamma_N[2] \cdot T$$

Die Abbildung

$$\chi : \Gamma \longrightarrow \{\pm 1\},\ M \mapsto (-1)^{ac+bc+bd}$$

ist ein abelscher Charakter von Γ mit Kern $\chi = \Gamma_N[2]$. ◇

Beweis
Wieder wollen wir die Darstellung von Γ über die Nebenklassen in $\Gamma[2]$ verwenden. Hierbei verwenden wir die Identität $J = U^2T$. Man hat also

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma[2] \cup \Gamma[2] \cdot T \cup \Gamma[2] \cdot (-UT) \cup \Gamma[2] \cdot J \cup \Gamma[2] \cdot U \cup \Gamma[2] \cdot U^2 \\ &= \Gamma_N[2] \cup \Gamma[2] \cdot T \cup \Gamma[2] \cdot (-UT) \cup \Gamma[2] \cdot J \\ &= \Gamma_N[2] \cup \Gamma[2] \cdot T \cup \Gamma[2] \cdot (UT) \cup \Gamma[2] \cdot (U^2T) \\ &= \Gamma_N[2] \cup \Gamma_N[2] \cdot T.\end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung folgt bereits, dass $\Gamma_N[2]$ als Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler ist.

Nach Satz (2.3) und (2.9) sind die Erzeuger von $\Gamma_N[2]$ aus der Menge $\{-E, T^2, JT^2J^{-1}, -U, T^2U, JT^2J^{-1}U, -U^2, T^2U^2, JT^2J^{-1}U^2\}$. Beachtet man nun die Relationen $U^3 = E$ und $UJ = T \Leftrightarrow U^{-1} = JT^{-1}$ und damit auch $JT^2J^{-1} = U^{-1}T^2U$, so reduziert sich diese Menge zu den Erzeugern T^2 und $-U$.

Nun wollen wir noch zeigen, dass $\Gamma_N[2]$ der einzige Normalteiler vom Index 2 in Γ ist. Sei dazu $\tilde{\Gamma}$ eine beliebige Untergruppe von Γ vom Index 2. Nun folgt sofort $M^2 \in \tilde{\Gamma}$ für alle $M \in \Gamma$. Andernfalls hätte man $[\Gamma : \tilde{\Gamma}] \geq 3$. Also gehören T^2, $J^2 = E$ und $U^4 = U$ zu $\tilde{\Gamma}$, das heißt $\Gamma_N[2] \subseteq \tilde{\Gamma}$ und somit $\tilde{\Gamma} = \Gamma_N[2]$.

Zuletzt betrachten wir nun noch die Abbildung χ. Sei dazu $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi(MJ) &= \chi\left(\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}\right) = (-1)^{bd-ad+ac} = (-1)^{ac+bc+bd-1} \\ &= \chi(M)(-1)^{-1} = \chi(M)\chi(J) \\ \chi(MT) &= \chi\left(\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}\right) = (-1)^{ac+c(a+b)+(a+b)(c+d)} \\ &= \chi(M)(-1)^{2ac+ad+bc} = \chi(M)(-1)^{ad-bc+2bc} \\ &= \chi(M)(-1) = \chi(M)\chi(T)\end{aligned}$$

Da Γ von J und T erzeugt wird, folgt

$$\chi(ML) = \chi(M)\chi(L) \quad \text{für alle } M, L \in \Gamma.$$

Aus $\chi(T^2) = 1 = \chi(-U)$ ergibt sich $\Gamma_N[2] \subseteq \text{Kern } \chi$. Wegen $\chi(T) = -1$ erhält man die Gleichheit. □

(2.12) Bemerkung

a) Die Benennung der Gruppe Γ_ϑ rührt daher, dass der sogenannte Theta-Nullwert $\vartheta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi\tau n^2}$ sie als „Invarianzgruppe" besitzt.

b) Die Kongruenzgruppen $\Gamma_0[2]$, $\Gamma^0[2]$ und Γ_ϑ sind konjugiert in Γ. Es gilt nämlich:

$$\Gamma^0[2] = J\Gamma_0[2]J^{-1} \text{ und } \Gamma_\vartheta = U\Gamma_0[2]U^{-1}$$

c) Nach M. Koecher [1985], Kapitel II.2.2, ist $\Gamma_N[2]$ genau die Kommutatorgruppe von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$. $\diamond$

Beweis

b)(i) Sei $L = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma^0[2]$, also $b \equiv 0 \pmod 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^0[2] \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & J^{-1}LJ \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & L \in J\Gamma_0[2]J^{-1}
\end{aligned}$$

b)(ii) Sei $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_\vartheta$, also

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 0 \pmod 2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma+\delta \equiv -\alpha-\beta \pmod 2 \quad (*).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
N \in \Gamma_\vartheta \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} \gamma+\delta & -\gamma \\ -\alpha-\beta+\gamma+\delta & \alpha-\gamma \end{pmatrix} \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha \\ -\gamma-\delta & \gamma \end{pmatrix} \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & U^{-1}NU \in \Gamma_0[2] \\
\Leftrightarrow \quad & N \in U\Gamma_0[2]U^{-1}
\end{aligned}$$

$\square$