# Modulformen zu Kongruenzgruppen I

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 30.04.2008

Micha Bittner

Im ersten Abschnitt des Vortrags untersuchen wir die Menge der Modulformen zu Kongruenzgruppen. Ziel ist es hier, einige zentrale Strukturergebnisse über ganze Modulformen zu Kongruenzgruppen sowie eine Dimensionsabschätzung für positive Gewichte herzuleiten. Im zweiten Teil des Vortrags wird als Anwendung der Theorie eine Aussage über die Darstellungsanzahlen einer natürlichen Zahl als Summe von Quadraten beschrieben.

Alle in der Ausarbeitung verwendeten Referenzen beziehen sich auf das Skript: A. Krieg: *Höhere Funktionentheorie I*, Aachen 2007.

## §1 Modulformen zu Kongruenzgruppen

In diesem Abschnitt werden einige Strukturaussagen, die Konstruktion ganzer Modulformen aus Modulformen zu Kongruenzgruppen sowie eine Dimensionsabschätzung bewiesen.

*— Grundlegende Definitionen und Beispiele —*

**(1.1) Definition**
Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *Hauptkongruenzgruppe* (mod $n$) definiert durch

$$\Gamma[n] := \{M \in \Gamma;\ M \equiv E \ (\text{mod } n)\}. \qquad \diamond$$

**(1.2) Definition**
Eine Untergruppe $\Lambda$ von $\Gamma$ heißt *Kongruenzgruppe*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\Gamma[n] \subset \Lambda$ gilt. $\diamond$

**(1.3) Definition**
Jeder Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \Lambda \longrightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

heißt *abelscher Charakter*.

Der Charakter, der jedes $M \in \Lambda$ auf 1 abbildet, heißt *trivialer Charakter* und wird mit 1 bezeichnet. Ein abelscher Charakter heißt *endlich*, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $\chi^m \equiv 1$. Ein abelscher Charakter $\chi$ heißt ein *Charakter* (mod $n$) *von* $\Lambda$, falls $\Gamma[n] \subset \Lambda$ und $\chi(M) = 1$ für alle $M \in \Gamma[n]$ gilt. $\diamond$

Zur Veranschaulichung der eingeführten Begriffe dient das folgende

**(1.4) Beispiel**

Sei

$$\Lambda = \Gamma_\vartheta := \{M \in \Gamma;\ M \equiv E(\text{mod } n) \vee M \equiv J(\text{mod } n)\} \quad \text{und}$$

$$\chi_\vartheta(M) := \begin{cases} 1, & \text{falls } M \in \Gamma[2], \\ -1, & \text{falls } M \notin \Gamma[2]. \end{cases}$$

Nach XXVIII (3.8) der Vorlesung ist $\Gamma_\vartheta$ eine Untergruppe von $\Gamma$. Weiter gilt $\Gamma[2] \subset \Gamma_\vartheta$, also ist $\Gamma_\vartheta$ eine Kongruenzgruppe.

Da $\chi_\vartheta$ ein Gruppenhomomorphismus ist der auf den Einheitskreis abbildet, ist $\chi_\vartheta$ ein abelscher Charakter. Nach Definition gilt $\chi_\vartheta(M) = 1$ für alle $M \in \Gamma[2]$. Damit ist $\chi$ ein Charakter (mod $n$) von $\Lambda$. Wegen $\chi^2 \equiv 1$ ist $\chi$ endlich. $\diamond$

**(1.5) Lemma**

Sei $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe. Dann ist jeder abelsche Charakter (mod $n$) von $\Lambda$ ein endlicher Charakter. $\diamond$

**Beweis**

Als Hilfsmittel benötigen wir den *kleinen Satz von Fermat*: Für eine Gruppe $G$ gilt $g^{|G|} = e$ für alle $g \in G$.

Als Kern des Homomorphismus

$$\phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\ M \longmapsto \overline{M}$$

aus XXVIII (3.2) ist $\Gamma[n]$ Normalteiler mit endlichem Index in $\Gamma$, also insbesondere in $\Lambda$. Die Faktorgruppe $\Lambda/\Gamma[n]$ ist also endlich mit $[\Lambda : \Gamma[n]] =: m$. Die Verknüpfung in $\Lambda/\Gamma[n]$ ist wie folgt gegeben:

$$(L\Gamma[n])\,(N\Gamma[n]) = LN\Gamma[n].$$

Mit dem kleinen Satz von Fermat gilt dann für ein beliebiges Element $L\Gamma[n]$ aus der Faktorgruppe:

$$L^m\Gamma[n] = (L\Gamma[n])^m = \Gamma[n] \qquad (\Gamma[n] \text{ ist neutrales Element in } \Lambda/\Gamma[n]),$$

also gilt $L^m \in \Gamma[n]$. Da $\chi$ abelscher Charakter (mod $n$), also insbesondere Gruppenhomomorphismus ist, gilt somit $\chi^m(L) = \chi(L^m) = 1$. $\square$

**(1.6) Definition**
Sei $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe und $\chi$ ein abelscher Charakter von $\Lambda$. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *ganze Modulform vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe* $\Lambda$ *und zum Charakter* $\chi$, wenn gilt

(MK.1) $f$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$,

(MK.2) $f|_k L = \chi(L) \cdot f$ für alle $L \in \Lambda$,

(MK.3) $f|_k M$ ist für jedes $M \in \Gamma$ bei $\infty$ holomorph.

Die Menge $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ aller ganzen Modulformen vom Gewicht $k$ zu $\Lambda$ und $\chi$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für den trivialen Charakter wählen wir die Abkürzung $\mathbb{M}_k(\Lambda) := \mathbb{M}_k(\Lambda, 1)$. ◇

Es gilt $\mathbb{M}_k = \mathbb{M}_k(\Gamma)$. Die Definition ist also sinnvoll gewählt.

**(1.7) Lemma**
Modulformen zu einer Kongruenzgruppe $\Lambda$ und zu abelschen Charakteren $\chi, \chi'$ können wie folgt multipliziert werden:

$$\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \cdot \mathbb{M}_l(\Lambda, \chi') \subset \mathbb{M}_{k+l}(\Lambda, \chi \cdot \chi').$$ ◇

**Beweis**
Für $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ und $g \in \mathbb{M}_l(\Lambda, \chi')$ gilt: $f \cdot g$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$. Für alle $L \in \Lambda$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$f \cdot g|_{k+l} L = (\gamma\tau + \delta)^{-(k+l)} f(L\tau) g(L\tau) = f|_k L(\tau) \cdot g|_l L(\tau) = \chi(L)\chi'(L)(f \cdot g)(\tau).$$

Nach ähnlichen Umformungen erhält man auch die Holomorphie im Unendlichen von $f \cdot g|_{k+l} M$ für alle $M \in \Gamma$. □

Ein erstes Beispiel solcher Modulformen ist $\vartheta^4$.

**(1.8) Beispiele**
Behauptung: $\vartheta^4 \in \mathbb{M}_2(\Gamma_\vartheta, \chi_\vartheta)$

(MK.1) $\vartheta^4$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$, da $\vartheta$ holomorph ist.

(MK.2) Nach XXVIII (3.8) wird $\Gamma_\vartheta$ erzeugt von

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt die Theta-Transformationsformel

$$\vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau) \quad \text{sowie} \quad \vartheta(\tau+2) = \vartheta(\tau).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta^4|_2 T^2(\tau) &= \vartheta^4(T^2\tau) = \vartheta^4(\tau+2) = \vartheta^4(\tau) = \chi_\vartheta(T^2)\vartheta^4(\tau) \quad \text{sowie} \\ \vartheta^4|_2 J(\tau) &= \tau^{-2}\vartheta^4(J\tau) = \tau^{-2}\vartheta^4(-1/\tau) = -\vartheta^4(\tau) = \chi_\vartheta(J)\vartheta^4(\tau), \end{aligned}$$

da $T^2 \equiv E \bmod 2$ und $J \notin \Gamma[2]$.

(MK.3) Nach XXVIII (3.8) gilt $\Gamma = \Gamma_\vartheta \cup (\Gamma_\vartheta \cdot T) \cup (\Gamma_\vartheta \cdot U)$. Nach XXIX (4.14)(a) beziehungsweise § 4(8) gilt

$$\begin{aligned} \vartheta(1-1/\tau) &= \sqrt{\tau/i}\,(\vartheta(\tau/4) - \vartheta(\tau))\,, \\ \vartheta^4(\tau+1) &= \vartheta^4(\tau) + \tau^{-2} \cdot \vartheta^4(1-1/\tau). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta^4|_2 U(\tau) &= \tau^{-2} \cdot \vartheta^4(1-1/\tau) = -\left(\vartheta(\tau/4) - \vartheta(\tau)\right)^4 \quad \text{und} \\ \vartheta^4(T\tau) &= \vartheta^4(\tau+1) = \vartheta^4(\tau) + \tau^{-2} \cdot \vartheta^4(1-1/\tau) \\ &= \vartheta^4(\tau) - \left(\vartheta(\tau/4) - \vartheta(\tau)\right)^4. \end{aligned}$$

Die Theta-Reihe $\vartheta$ ist holomorph in Unendlich, deshalb ist auch $\vartheta^4$ und damit $\vartheta^4(\tau)|_k M$ holomorph in Unendlich für alle $M \in \Gamma$. $\diamond$

— *Strukturaussagen über ganzen Modulformen zu Kongruenzgruppen* —

Eine erste Strukturaussage enthält die folgende

**(1.9) Proposition**
Sei $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe mit $-E \in \Lambda$ und $\chi$ ein abelscher Charakter von $\Lambda$. Gilt $\chi(-E) \neq (-1)^k$, so folgt $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) = \{0\}$. $\diamond$

**Beweis**
Sei $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$. Nach (MK.2) gilt $f|_k(-E)(\tau) = (-1)^{-k} f(-E\tau) = (-1)^k f(\tau) = \chi(-E) f(\tau)$. Da nach Voraussetzung $\chi \neq 1$ gilt ist dies nur für $f = 0$ erfüllt. $\square$

Aus Definition 1.6 erhält man eine Aussage über die Menge der Modulformen zu den zu $\Lambda$ konjugierten Untergruppen.

**(1.10) Proposition**
Sei $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe, $\chi$ ein abelscher Charakter von $\Lambda$ und $M \in \Gamma$. Dann ist

$$\chi_M(K) := \chi(MKM^{-1}) \quad \text{für alle} \quad K \in M^{-1}\Lambda M \tag{1}$$

ein abelscher Charakter von $M^{-1}\Lambda M$ und die Abbildung

$$\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \longrightarrow \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M), f \longmapsto f|_k M \tag{2}$$

ein Vektorraumisomorphismus. $\diamond$

**Beweis**

**(1)** Wegen $K \in M^{-1}\Lambda M$ gilt also $MKM^{-1} \in MM^{-1}\Lambda MM^{-1} = \Lambda$. Weiter hat man

$$\chi_M(K)\chi_M(L) = \chi(MKM^{-1})\chi(MLM^{-1}) = \chi(MKLM^{-1}) = \chi_M(KL).$$

Mit $\chi$ ist also auch $\chi_M$ ein abelscher Charakter.

**(2)** Zeige zunächst: $f|_k M \in \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$. $\Gamma[n]$ ist Normalteiler, dass heißt $M^{-1}\Gamma[n]M = \Gamma[n]$. Wegen $\Gamma[n] \subset \Lambda$ gilt also auch $\Gamma[n] \subset M^{-1}\Lambda M$, also ist $M^{-1}\Lambda M$ eine Kongruenzgruppe. Nach (1) ist $\chi_M$ abelscher Charakter.

(MK.1) Der Strichoperator ist definiert durch $f|_k M(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(M\tau)$. Da $f$ und die Abbildung $\tau \to (c\tau + d)^{-k}$ holomorph auf $\mathbb{H}$ sind, folgt die Holomorphie von $f|_k M$ auf der oberen Halbebene.

(MK.2) Sei $L \in M^{-1}\Lambda M$ und $N \in \Lambda$ mit $L = M^{-1}NM$. Für $\Lambda$ erhält man aus (MK.2):

$$\begin{aligned}
((f|_k M)|_k L)(\tau) &= ((f|_k M)|_k M^{-1}NM)(\tau) \\
&= ((f|_k NM)(\tau) \\
&= (c\tau + d)^{-k}(f|_k N)(M\tau) \\
&= (c\tau + d)^{-k}\chi(N)f(M\tau) \\
&= \chi(MM^{-1}NMM^{-1})(f|_k M)(\tau) \\
&= \chi_M(M^{-1}NM)(f|_k M)(\tau) \\
&= \chi_M(L)(f|_k M)(\tau).
\end{aligned}$$

(MK.3) Wegen $((f|_k M)|_k N) = f|_k MN$ und $MN \in \Gamma$ ist $f|_k MN$ holomorph bei $\infty$.

Zeige noch:

$$\phi : \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \to \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M), f \mapsto f|_k M$$

ist Isomorphismus.

Dazu: $\phi$ ist Homomorphismus. Weiter ist $\phi$ injektiv, da aus $f|_k M = h|_k M$ bereits $f = h$ folgt. Zeige: $\phi$ ist surjektiv.

Betrachte dazu zu $g \in \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$ die Funktion $f := g|_k M^{-1}$. Nach obiger Diskussion erfüllt diese $g|_k M^{-1} \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$. Weiter gilt $f|_k M = g$. Damit ist die Surjektivität von $\phi$ gezeigt. □

Wegen (MK.3) können wir unter der zusätzlichen Voraussetung $\chi$ abelscher Charakter (mod $n$) von $\Lambda$ eine Fourier-Entwicklung für die $f|_k M$ der folgenden Form angeben:

**(1.11) Satz**
Sei $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\Lambda \supset \Gamma[n]$ eine Kongruenzgruppe und $\chi$ ein abelscher Charakter (mod $n$) von $\Lambda$. Ist $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ und $M \in \Gamma$, so besitzt $f|_k M$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f|_k M(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) \cdot e^{2\pi i m \tau / n} \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H},$$

die für jedes $\varepsilon > 0$ auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H}; \operatorname{Im}\tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig konvergiert.
Die Fourier-Koeffizienten $\alpha_f(m; M)$ sind eindeutig bestimmt und erfüllen

$$\alpha_f(m; LM) = \chi(L) \cdot \alpha_f(m; M) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0, L \in \Lambda \text{ und } M \in \Gamma. \tag{3}$$

◇

**Beweis**
Da $\chi$ Charakter (mod $n$) ist gilt $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \subset \mathbb{M}_k(\Gamma[n])$. Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[n]$ ist ein Normalteiler in $\Gamma$, somit gilt $M\Gamma[n]M^{-1} = \Gamma[n]$ für beliebiges $M \in \Gamma$. Daher gilt wegen $f \in \mathbb{M}_k(\Gamma[n])$ nach Proposition (1.10) auch $f|_k M \in \mathbb{M}_k(\Gamma[n])$. Betrachte

$$g(\tau) := f|_k M(n\tau) \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Wegen $f|_k M \in \mathbb{M}_k(\Gamma[n])$ und $n\tau \in \mathbb{H}$ ist $g$ holomorph auf $\mathbb{H}$ und in Unendlich. Wegen $T^n \in \Gamma[n]$ gilt

$$\begin{aligned} g(\tau+1) &= f|_k M(n\tau+n) \\ &= f|_k M(T^n < n\tau >) \\ &= ((f|_k M)|_k T^n)(n\tau) \\ &\overset{\text{(MK.2)}}{=} f|_k M(n\tau) = g(\tau), \end{aligned}$$

Also ist $g$ periodisch mit Periode 1. Daher existiert nach XX (4.2) der Vorlesung $\hat{g}$ mit

$$g(\tau) = \hat{g}(e^{2\pi i\tau}) \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{4}$$

Da $g$ holomorph in $\infty$ ist hat $\hat{g}$ eine isolierte (hebbare) Singularität in 0. Es existiert also eine LAURENT-Entwicklung um 0 von $\hat{g}$ der Form

$$\hat{g}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_g(m) z^m$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten, die auf $\dot{\mathbb{E}}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Mit (4) und der Substitution $z := e^{2\pi i\tau}$ besitzt $g$ eine FOURIER-Entwicklung

$$g(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_g(m) e^{2\pi i m\tau},$$

die für $\operatorname{Im}\tau > 0$ absolut gleichmäßig konvergiert und natürlich eindeutig bestimmte Koeffizienten hat. Substituiert man $\tau$ durch $\tau/n$ erhält man die Behauptung

$$f|_k M(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) \cdot e^{2\pi i m\tau/n}.$$

Zeige noch (3): Es gilt

$$\begin{aligned} f|_k LM(\tau) &= f|_k L(M\tau)(c\tau+d)^{-k} \\ &\overset{\text{(MK.2)}}{=} \chi(L) \cdot f(M\tau)(c\tau+d)^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \chi(L)\alpha_f(m; M) \cdot e^{2\pi i m\tau/n}, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten. □

— *Konstruktion von ganzen Modulformen* —

In diesem Abschnitt beschreiben wir zwei Möglichkeiten, aus ganzen Modulformen zu Kongruenzgruppen ganze Modulformen zur vollen Modulgruppe zu konstruieren.

Grundlage bildet die folgende algebraische Überlegung.

**(1.12) Lemma**
Sei $U$ eine Untergruppe einer Gruppe $G$ mit endlichem Index $m$. Ist $g \in G$ und $g_1, \dots, g_m$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $G$ nach $U$, dass heißt

$$G = \bigcup_{j=1}^{m} Ug_j,$$

so ist auch $g_1 g, \dots, g_m g$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen. $\diamond$

**Beweis**
Nach Voraussetzung gibt es genau $m$ Nebenklassen von $G$ nach $U$. Mit $Ug_1, \dots, Ug_m$ sind aber auch die Rechtsnebenklassen $Ug_1 g, \dots, Ug_m g$ paarweise disjunkt und in G enthalten, sonst folgt mit

$$Ug_j g = Ug_i g \quad \text{für} \quad i \neq j \quad \Leftrightarrow \quad Ug_j = Ug_i \quad \text{für} \quad i \neq j$$

ein Widerspruch. $\square$

**(1.13) Korollar**
Sei $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe vom Index $m$ in $\Gamma$ und $M_1, \dots, M_m$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $\Gamma$ nach $\Lambda$. Ist $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda)$, so gilt

a) $\mathrm{Sp}(f) := \sum_{j=1}^{m} f|_k M_j \in \mathbb{M}_k$,

b) $\pi(f) := \prod_{j=1}^{m} f|_k M_j \in \mathbb{M}_{km}$.

Man nennt $\mathrm{Sp}(f)$ die *Spur* von $f$. $\diamond$

**Beweis**
Die Definitionen von $\mathrm{Sp}(f)$ und $\pi(f)$ hängen nicht von der Wahl der Vertreter ab: Seien $M, M'$, wobei $M \neq M'$, Vertreter derselben Nebenklasse, dann gilt

$$\Lambda M = \Lambda M'.$$

Es existieren also $L$, $K \in \Lambda$ mit $LM = KM'$, also $M = L^{-1}KM'$, wobei $L^{-1}K \in \Lambda$. Wegen $\chi(L) \equiv 1$ gilt mit (MK.2) für alle $N \in \Lambda$:

$$f|_k N = f, \quad \text{also} \quad f|_k M = f|_k M'.$$

Zeige nun

a) (M.1′) Wegen $f|_k M \in \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M)$ ist $f|_k M$ holomorph auf $\mathbb{H}$, also folgt auch die Holomorphie für die Summe.

(M.2′) Für beliebiges $M \in \Gamma$ gilt $\mathrm{Sp}(f)|_k M = \sum_{j=1}^m f|_k M_j M$. Nach (1.12) ist auch $\{M_j M\}_{j=1}^m$ ein Vertretersystem. Wegen der Repräsentantenunabhängigkeit von $\mathrm{Sp}(f)$ und $\pi(f)$ erhält man also

$$\mathrm{Sp}(f)|_k M = \mathrm{Sp}(f).$$

(M.3′) Für alle $M \in \Gamma$ ist $f|_k M$ holomorph in Unendlich, damit ist auch $\mathrm{Sp}(f)$ holomorph in Unendlich.

b) Wegen

$$\begin{aligned}\pi(f)|_{km}M(\tau) &= \left(\prod_{j=1}^m f|_k M_j\right)|_{km}M(\tau)\\ &= \left(\prod_{j=1}^m f|_k M_j\right)(M\tau)\cdot(c\tau+d)^{-km}\\ &= (c\tau+d)^{-k}\cdot f|_k M_1(M\tau)\cdot\dots\cdot(c\tau+d)^{-k}\cdot f|_k M_m(M\tau)\\ &= \prod_{j=1}^m f|_k M_j M\end{aligned}$$

erhält man (M.1′)–(M.3′) analog. □

Für negatives Gewicht erhalten wir unter Vewendung der in (1.13) konstruierten ganzen Modulformen ähnliche Resultate wie bei den ganzen Modulformen.

**(1.14) Satz**
Sei $k \in \mathbb{Z}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe und $\chi$ ein endlicher abelscher Charakter von $\Lambda$.

a) $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) = \{0\}$, falls $k < 0$.

b) (i) $\mathbb{M}_0(\Lambda) = \mathbb{C}$

(ii) $\mathbb{M}_0(\Lambda, \chi) = \{0\}$, falls $\chi \neq 1$. ◇

**Beweis**
Sei $k \leq 0$. Da $\chi$ ein endlicher abelscher Charkakter ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\chi^m \equiv 1$. Betrachte zu $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ die Funktion $g := f^m$. Zeige: $g \in \mathbb{M}_{km}(\Lambda)$

Es ist $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe und $\chi^m$ ein abelscher Charakter.

(MK.1) Mit $f$ ist auch $f^m$ holomorph auf $\mathbb{H}$.

(MK.2) Für alle $L \in \Lambda$ gilt

$$\begin{aligned} f^m|_{km}L(\tau) &= (\gamma\tau+\delta)^{-km} f^m(L\tau) \\ &= (\gamma\tau+\delta)^{-k} f(L\tau) \dots (\gamma\tau+\delta)^{-k} f(L\tau) \\ &= [f|_k L(\tau)]^m \\ &= \chi^m(L) f^m(\tau) = f^m. \end{aligned}$$

(MK.3) Wegen $(f^m|_{km}M) = (f|_k M)^m$ ist $f^m|_{km}M$ holomorph bei $\infty$ für alle $M \in \Gamma$.

Sei $l := [\Gamma : \Lambda]$. Nach (1.13) ist dann $\pi(g) \in \mathbb{M}_{kml}$

a) Nach Satz XXIX (1.5) gilt wegen $lkm < 0$, dass $\mathbb{M}_{lkm} = \{0\}$ ist. Damit gilt $\pi(g) \equiv 0$. Da $\pi(g)$ ein endliches Produkt von auf $\mathbb{H}$ holomorphen Funktionen ist erhält man mit dem Identitätssatz $g|_k M_j \equiv 0$ für ein $1 \leq j \leq l$: Die Menge $M_j\mathbb{H} = \mathbb{H}$ ist offensichtlich nicht diskret, also folgt mit $g|_k M_j = (c_j\tau + d_j)^{-k} g(M_j\tau)$ aus dem Identitätssatz $g \equiv 0$. Mit dem Identitätssatz erhält man wiederum $f \equiv 0$, sonst ist mit $\{\tau;\ f(\tau) = 0\}$ auch die Menge $\{\tau;\ f^m(\tau) = 0\}$ diskret.

b) Sei jetzt $k = 0$.

   (i) Sei $\chi \equiv 1$. Es gilt $\mathbb{C} \subset \mathbb{M}_0(\Lambda)$. Zeige also noch: $h \in \mathbb{M}_0(\Lambda)$, dann gilt bereits $h \in \mathbb{C}$. Definiere dazu die Funktion $\tilde{h} := h - h(0) \in \mathbb{M}_0(\Lambda)$. Für $\tilde{h} = \tilde{h}|_0 E$ gilt dann

$$\alpha_{\tilde{h}}(0, E) = 0$$

   Wähle ohne Einschränkung $M_1 := E$, $M_2, \dots, M_l$ als Vertretersystem der Rechtsnebenklassen, dann gilt aber

$$\lim_{y\to\infty} \pi(\tilde{h})(iy) = \lim_{y\to\infty} \prod_{j=1}^{l} \tilde{h}|_k M_j(iy) = \lim_{y\to\infty} \left(\tilde{h}|_k E(iy)\right) \cdot \lim_{y\to\infty} \left( \prod_{j=1}^{l} \tilde{h}|_k M_j(iy) \right)$$

   Wegen $\alpha_{\tilde{h}}(0, E) = 0$ folgt mit (1.11) aus der absolut gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Entwicklung auf der oberen Halbebene:

$$\lim_{y\to\infty} \left(\tilde{h}|_k E(iy)\right) = \lim_{y\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{\tilde{h}}(m; E) \cdot \underbrace{e^{-2\pi m y/n}}_{\to 0,\, m \neq 0} = 0.$$

   Man erhält also $\lim_{y\to\infty} \pi(\tilde{h})(iy) = 0$. Da $\pi(\tilde{h}) \in \mathbb{M}_0$ und $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}$ nach XXIX (4.1) muss auch $\pi(\tilde{h}) \equiv 0$ gelten. Dann erhält man mit dem Identitätssatz $\tilde{h} \equiv 0$. Also ist $h$ konstant.

(ii) Sei $\chi \neq 1$. Wegen $g \in \mathbb{M}_0(\Lambda)$ folgt mit (i): $g = f^m$ ist konstant. Dann muss auch $f$ konstant sein. Mit (MK.2) folgt weiter $f \equiv 0$, sonst erhält man für ein $L \in \Lambda$ mit

$$f|_k L = \chi(L) f \quad \Longleftrightarrow \quad f(i) = \chi(L) \cdot f(i),$$

da $f$ konstant ist einen Widerspruch. □

*— Dimensionsabschätzung für positive Gewichte —*

Für positive Gewichte geben wir eine Dimensionsabschätzung.

**(1.15) Satz**
Sei $k \in \mathbb{N}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe und $\chi$ ein abelscher Charakter (mod $n$) von $\Lambda$. Sei $\Lambda^* := \{L \in \Lambda;\ \chi(L) = 1\}$ und $l := [\Gamma : \Lambda^*]$. Ist $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ und $M \in \Gamma$ mit

$$\alpha_f(m; M) = 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \leq m \leq \frac{lkn}{12}, \tag{5}$$

so folgt $f = 0$. ◇

**Beweis**
Für $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ gilt insbesondere $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda^*)$, da $f|_k L = \chi(L) \cdot f = f$ für alle $L \in \Lambda^*$, also (MK.1)–(MK.3). Nach (1.13) ist dann $g := \pi(f) \in \mathbb{M}_{lk}$. Für $g$ hat man deshalb nach (M.3″) eine Darstellung der Form

$$\pi(f) = \sum_{m \geq 0} \alpha_g(m) e^{2\pi i m \tau}.$$

Ist $M_1 := M, \ldots, M_l$ ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\Lambda^*$ in $\Gamma$. $f|_k M$ hat nach (1.11) eine Darstellung der Form

$$f|_k M(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) \cdot e^{2\pi i m \tau / n}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi(f) &= (f|_k M) \cdot \left( \prod_{j=2}^{l} f|_k M_j \right) \\
&= \left( \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) \cdot e^{2\pi i m\tau/n} \right) \cdot \left( \prod_{j=2}^{l} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \alpha_f(m; M_j) \cdot e^{2\pi i m\tau/n} \right) \right) \\
&= \left( \sum_{m=\left[\frac{lkn}{12}\right]+1}^{\infty} \alpha_f(m; M) \cdot e^{2\pi i m\tau/n} \right) \cdot \left( \prod_{j=2}^{l} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \alpha_f(m; M_j) \cdot e^{2\pi i m\tau/n} \right) \right) \\
&= \sum_{m \geq 0} \alpha_g(m) e^{2\pi i m\tau}.
\end{aligned}$$

Multipliziert man diesen Term aus, so ist in jedem vorkommenden Summanden der Exponentialterm von der Form $e^{2\pi i m\tau}$, wobei $m > \frac{kl}{12}$. Aus der Eindeutigkeit der Fourier-Koeffizienten folgt nach Koeffizientenvergleich

$$\alpha_g(m) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq m \leq \frac{lk}{12}.$$

Dann gilt aber schon $g \equiv 0$, da sonst wegen $g \in \mathbb{M}_{kl}$ nach XXIX (4.7) und XXIX (4.6) aus

$$\operatorname{ord}_\infty g < \dim \mathbb{M}_{kl} \leq \left[\frac{lk}{12}\right] + 1$$

wegen $\operatorname{ord}_\infty g \geq \left[\frac{lk}{12}\right] + 1$ ein Widerspruch folgt. Damit gilt bereits $\pi(f) \equiv 0$ also folgt mit dem Identitätssatz $f \equiv 0$. □

**(1.16) Korollar**
Sei $k \in \mathbb{N}$, sowie $\Lambda$ eine Kongruenzgruppe und $\chi$ ein abelscher Charakter (mod $n$) von $\Lambda$. Sei $\Lambda^* := \{L \in \Lambda;\, \chi(L) = 1\}$ und $l := [\Gamma : \Lambda^*]$. Dann gilt

$$\dim \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \leq \left[\frac{lkn}{12}\right] + 1$$

◇

**Beweis**
Sei $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$. Betrachte für $M \in \Gamma$ die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \longrightarrow \mathbb{C}^{\left[\frac{lkn}{12}\right]+1}, f \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_f(0, M) \\ \vdots \\ \alpha_f\left(\left[\frac{lkn}{12}\right] + 1, M\right). \end{pmatrix}$$

Zeige: $\Psi$ ist Monomorphismus. Wegen $(af+bg)|_k M = a(f|_k M) + b(g|_k M)$ und der Eindeutigkeit der Fourier-Koeffizienten gilt

$$\Psi(af+bg) = \begin{pmatrix} a\alpha_f(0,M) + b\alpha_g(0,M) \\ \vdots \\ a\alpha_f\left(\left[\frac{lkn}{12}\right]+1, M\right) + b\alpha_g\left(\left[\frac{lkn}{12}\right]+1, M\right) \end{pmatrix} = a\Psi(f) + b\Psi(g).$$

daher ist $\Psi$ ist ein Vektorraumhomomorphismus. Zeige noch: $\Psi$ ist injektiv. Seien $f, g \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ mit $\Psi(f) = \Psi(g)$, also

$$\begin{pmatrix} \alpha_f(0,M) \\ \vdots \\ \alpha_f\left(\left[\frac{lkn}{12}\right]+1, M\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_g(0,M) \\ \vdots \\ \alpha_g\left(\left[\frac{lkn}{12}\right]+1, M\right) \end{pmatrix}.$$

Dies kann äquivalent umgeformt werden zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_f(0,M) - \alpha_g(0,M) \\ \vdots \\ \alpha_f\left(\left[\frac{lkn}{12}\right]+1, M\right) - \alpha_g\left(\left[\frac{lkn}{12}\right]+1, M\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt aber $\alpha_{f-g}(m; M) = 0 \quad$ für alle $\quad 0 \leq m \leq \frac{lkn}{12} + 1$, also mit (1.15) $f - g = 0$ und folglich $f = g$. Dann gilt aber

$$\dim \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \leq \dim \mathbb{C}^{\left[\frac{lkn}{12}\right]+1} = \left[\frac{lkn}{12}\right] + 1.$$

□

# §2 Der Vier-Quadrate-Satz

In der folgenden zahlentheoretischen Anwendung der im ersten Paragraphen entwickelten Resultate soll der *Vier-Quadrate-Satz* bewiesen werden. Dieser liefert eine Aussage über die Anzahl von Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von 4 beziehungsweise 8 Quadraten.

**(2.1) Definition**
Für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\delta_k := \# \left\{ (g_1, \ldots, g_k)^t \in \mathbb{Z}^k; g_1^2 + \cdots + g_k^2 = m \right\}$$

die *Anzahl von Darstellungen* einer natürlichen Zahl als Summe von Quadraten. ◇

**(2.2) Lemma**
Für $k \in \mathbb{N}$ und $m = g_1^2 + \cdots + g_k^2 \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\vartheta^k(\tau) = \sum_{g_1,\dots,g_k \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau (g_1^2 + \cdots + g_k^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(m) e^{\pi i \tau m}.$$

◇

**Beweis**
Die reelle Theta-Reihe ist gegeben durch

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau n^2}$$

Zeige die Behauptung über Induktion nach $k$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{l,n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau (l+n)} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau (l+n)} \\ &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau l}\right) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau n}\right) \\ &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau j}\right)^2.\end{aligned}$$

Es gelte die Behauptung für alle natürlichen Zahlen kleiner $k$, dann folgt die Behauptung nach ähnlicher Argumentation nach dem Induktionsprinzip. Die zweite Gleichung folgt aus der Bedingung $m = g_1^2 + \cdots + g_k^2$. □

**(2.3) Satz**
a) Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\vartheta^4(\tau) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot G_2^*(2\tau) - G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right)\right), \tag{6}$$

$$\vartheta^8(\tau) = \frac{1}{15}\left(16 \cdot G_4^*(\tau) - G_4^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right). \tag{7}$$

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\delta_4(m) = 8 \cdot \sum_{d \mid m,\, 4 \nmid d} d, \tag{8}$$

$$\delta_8(m) = 16 \cdot \sum_{d \mid m} (-1)^{m-d} d^3. \tag{9}$$

◇

**Beweis**
Mit analogen Argumenten wie in Beispiel (1.8) erhält man $\vartheta^8 \in \mathbb{M}_4(\Gamma_\vartheta)$. Betrachte die Funktion

$$f(\tau) = \frac{1}{15}\left(16 \cdot G_4^*(\tau) - G_4^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{\pi i m \tau}.$$

Wegen

$$G_4^*(\tau) = 1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau}, \quad \text{wobei} \quad \sigma_s(m) = \sum_{d \in \mathbb{N},\, d|m} d^s, \quad \text{für jedes} \quad s \in \mathbb{R}$$

erhält man

$$f(\tau) = 1 + 16^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau} - 16 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{\pi i m (\tau+1)}.$$

Dann gilt $\alpha_f(0) = 1$ und für $m \in \mathbb{N}$ wegen $e^{\pi i m} = (-1)^m$

$$\begin{aligned}
\alpha_f(m) &= \begin{cases} 16^2 \sigma_3(m/2) - 16\sigma_3(m) e^{\pi i m}, & 2 \mid m \\ -16\sigma_3(m) e^{\pi i m}, & 2 \nmid m \end{cases} \\
&= \begin{cases} 16\left(16 \sum_{d \in \mathbb{N},\, d|m/2} d^3 - \sum_{d \in \mathbb{N},\, d|m} d^3\right), & 2 \mid m \\ 16\sigma_3(m), & 2 \nmid m \end{cases} \\
&= \begin{cases} 16\left(2 \sum_{d \in \mathbb{N},\, d|m,\, 2|d} d^3 - \sum_{d \in \mathbb{N},\, d|m} d^3\right), & 2 \mid m \\ 16\sigma_3(m), & 2 \nmid m \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei $d \mid (m/2)$ äquivalent ist zur Existent eines $c \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2dc$. Mit der Substitution $a := 2d$ ist dies äquivalent zu $a \mid m$ und $2 \mid a$. Jetzt unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1: Sei $2 \mid m$ und $2 \mid d$.

$$\alpha_f(m) = 16(\textstyle\sum(2d^3 - d^3)) = 16 \sum d^3 = 16 \sum (-1)^{m-d} d^3.$$

Fall 2: Sei $2 \mid m$ und $2 \nmid d$.

$$\alpha_f(m) = 16(\textstyle\sum(0 - 1d^3)) = 16 \sum (-1) d^3 = 16 \sum (-1)^{m-d} d^3.$$

Fall 3: Sei $2 \nmid m$. Dann gilt auch $2 \nmid d$.

$$\alpha_f(m) = 16 \textstyle\sum d^3 = 16 \sum (-1)^{m-d} d^3.$$

Damit gilt

$$\alpha_f(m) = 16 \cdot \sum_{d|m} (-1)^{m-d} d^3.$$

Zeige: $f \in \mathbb{M}_4(\Gamma_\vartheta)$. Die Eisensteinreihe $G_4^* \in \mathbb{M}_4$ ist eine ganze Modulform. Es gilt daher $f|_4 J = f|_4 T^2 = f$ und somit (MK.2), da $\Gamma_\vartheta$ von $T^2$ und $J$ erzeugt wird. Weiter ist $f$ holomorph auf $\mathbb{H}$, also gilt (MK.1).

$$\begin{aligned} f(\tau+1) &= \frac{1}{15}\left(16 \cdot G_4^*(\tau+1) - G_4^*\left(\frac{\tau+2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{15}\left(16 \cdot G_4^*(\tau) - G_4^*\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta^4|4U(\tau) = \tau^{-4} f(1-1/\tau) &= \tau^{-4}\frac{1}{15}\left(16 \cdot G_4^*(1-1/\tau) - G_4^*\left(\frac{2-1/\tau}{2}\right)\right) \\ &= \tau^{-4}\frac{1}{15}\left(16\tau^4 \cdot G_4^*(\tau) - (2\tau)^4 G_4^*(2\tau)\right) \\ &= \frac{16}{15}\left(G_4^*(\tau) - G_4^*(2\tau)\right). \end{aligned}$$

Da $\Gamma = \Gamma_\vartheta \cup (\Gamma_\vartheta \cdot T) \cup (\Gamma_\vartheta \cdot U)$ gilt erhält man damit (MK.3). Nach (2.2) hat $\vartheta^4$ die Darstellung $\sum_{m=0}^\infty \delta_k(m) e^{\pi i \tau m}$. Man verifiziert direkt

$$\begin{aligned} &\alpha_f(0) = 1, \quad \delta_8(0) = 1, \\ &\alpha_f(1) = 16, \quad \delta_8(1) = 16, \\ &\alpha_f(2) = -16 + 8 \cdot 16 = 112, \quad \delta_8(2) = 112. \end{aligned}$$

Betrachte $o := \vartheta^8 - f$ mit $\Lambda = \Lambda^* = \Gamma_\vartheta$. Es gilt $k = 4$, sowie $l = 3$ und $n = 2$. Wegen

$$\alpha_o(m, E) = 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \le m \le \frac{24}{12} = 2$$

gilt nach Satz (1.15) $o \equiv 0$, also $f = \vartheta^8$. Die Eindeutigkeit der FOURIER-Koeffizienten liefert bei Koeffizientenvergleich

$$\alpha_f(m) = \delta_8(m).$$

Nach (1.8) gilt $\vartheta^4 \in \mathbb{M}_2(\Gamma_\vartheta, \chi_\vartheta)$. Betrachte andererseits

$$g(\tau) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot G_2^*(2\tau) - G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) = \sum_{m=0}^\infty \alpha_g(m) \cdot e^{\pi i m \tau}.$$

Wegen
$$G_2^*(\tau) = 1 - 24 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e^{2\pi i m \tau}$$
erhält man
$$\begin{aligned} g(\tau) &= \frac{1}{3}\left(4 - 96 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e^{4\pi i m\tau} - 1 + 24 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_1(m) e^{\pi i m \tau}\right) \\ &= \left(1 + 8 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_1(m) e^{\pi i m \tau} - 32 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e^{4\pi i m \tau}\right). \end{aligned}$$
Es gilt also $\alpha_g(0) = 1$ und
$$\begin{aligned} \alpha_g(m) &= \begin{cases} 8\sigma_1(m) - 32\sigma_1(m/4), & 4 \mid m \\ 8\sigma_1(m), & 4 \nmid m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 8\left(\sum_{d\in\mathbb{N},\, d|m} d - 4\sum_{d\in\mathbb{N},\, d|m/4} d\right), & 4 \mid m \\ 8\sigma_1(m), & 4 \nmid m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 8\left(\sum_{d\in\mathbb{N},\, d|m} d - \sum_{d\in\mathbb{N},\, d|m,\, 4|d} d\right), & 4 \mid m \\ 8\sigma_1(m), & 4 \nmid m \end{cases} \\ &= 8 \cdot \sum_{d|m,\, 4\nmid d} d. \end{aligned}$$

Zeige: $g \in \mathbb{M}_2(\Gamma_\vartheta, \chi_\vartheta)$. Es gilt $G_2^*(\tau) = 1 - 24 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e^{2\pi i m\tau}$. Weiter erhält man aus $G_2^*(\tau) = (2/\pi^2) \cdot G_2(\tau)$ sowie
$$G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i \tau \Longleftrightarrow G_2^*(-1/\tau) = \tau^2 G_2^*(\tau) - \frac{6i\tau}{\pi}$$
und da $\tau \to G_2^*(\tau+1)$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist:
$$\begin{aligned} g|_2 J(\tau) = \tau^{-2} g(-1/\tau) &= \tau^{-2}\frac{1}{3}\left(4 \cdot G_2^*(-2/\tau) - G_2^*\left(-1/(2\tau)\right)\right) \\ &= \tau^{-2}\frac{1}{3}\left(4 \cdot \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{4\cdot 6i(\tau/2)}{\pi} - (2\tau)^2 G_2^*(2\tau) + \frac{12 i\tau}{\pi}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(4 \cdot G_2^*(2\tau) - G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) \\ &= -g(\tau) = \chi_\vartheta(J) g(\tau) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g|_2 T^2(\tau) = g(\tau+2) &= 1 + 8 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_1(m) e^{\pi i m(\tau+2)} - 32 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e^{4\pi i m(\tau+2)} \\ &= 1 + 8 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_1(m) e^{\pi i m\tau} \underbrace{e^{2\pi i m}}_{=1} - 32 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e^{4\pi i m\tau} \underbrace{e^{8\pi i m}}_{=1} \\ &= g(\tau) = \chi_\vartheta(T^2) g(\tau). \end{aligned}$$

Da $\Gamma_\vartheta$ von $T^2$ und $J$ erzeugt wird folgt (MK.2). Weiter gilt (MK.1) wegen der Holomorphie. Es gilt

$$g|_2 T(\tau) = g(\tau+1) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot \underbrace{G_2^*(2\tau+2)}_{=G_2^*(2\tau)} - G_2^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right)$$

$$g|_2 U(\tau) = \tau^{-2} g(1 - 1/\tau) = \frac{1}{3}\tau^{-2}\left(4 \cdot G_2^*((-2/\tau)+2) - G_2^*\left(\frac{(-1/\tau)+1}{2}\right)\right)$$

Betrachte zunächst

$$\begin{aligned} 4\tau^{-2} G_2^*\left(2 - \frac{2}{\tau}\right) &= 4\tau^{-2} G_2^*\left(-\frac{2}{\tau}\right) \\ &= 4\tau^{-2}\left(\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \cdot G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{6i}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}\right) \\ &= G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{12i}{\pi\tau}. \end{aligned}$$

Weiter erhält man wegen der Periodizität Modulo 1 von $G_2^*$

$$\begin{aligned}
\tau^{-2}G_2^*\left(\frac{(-1/\tau)+1}{2}\right) &= \tau^{-2}G_2^*\left(\frac{\tau-1-2\tau}{2\tau}+1\right)\\
&= \tau^{-2}G_2^*\left(\frac{-\tau-1}{2\tau}\right)\\
&= \tau^{-2}\left(\left(\frac{2\tau}{\tau+1}\right)^2 G_2^*\left(\frac{2\tau}{\tau+1}\right) - \frac{6i}{\pi}\cdot\frac{2\tau}{\tau+1}\right)\\
&= \left(\frac{2}{\tau+1}\right)^2 G_2^*\left(\frac{2\tau+2-2}{\tau+1}\right) - \frac{12i}{\pi\tau(\tau+1)}\\
&= \left(\frac{2}{\tau+1}\right)^2 G_2^*\left(-\frac{2}{\tau+1}\right) - \frac{12i}{\pi\tau(\tau+1)}\\
&= \left(\frac{2}{\tau+1}\right)^2 \left(\left(\frac{\tau+1}{2}\right)^2 G_2^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \frac{6i}{\pi}\cdot\frac{\tau+1}{2}\right) - \frac{12i}{\pi\tau(\tau+1)}\\
&= G_2^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \frac{12i}{\pi(\tau+1)} - \frac{12i}{\pi\tau(\tau+1)}\\
&= G_2^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \frac{12i(\tau+1)}{\pi\tau(\tau+1)}\\
&= G_2^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \frac{12i}{\pi\tau}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$g|_2U(\tau) = \frac{1}{3}\left(G_2^*\left(\frac{\tau}{2}\right) - G_2^*\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right).$$

Wegen $\Gamma = \Gamma_\vartheta \cup (\Gamma_\vartheta \cdot T) \cup (\Gamma_\vartheta \cdot U)$ erhält man damit (MK.3). Somit gilt $g \in \mathbb{M}_2(\Gamma_\vartheta, \chi_\vartheta)$. Man verifiziert

$$\begin{aligned}
&\alpha_g(0) = 1, \quad \delta_4(0) = 1,\\
&\alpha_g(1) = 8, \quad \delta_4(1) = 8,\\
&\alpha_g(2) = 8+16 = 24, \quad \delta_4(2) = 24.
\end{aligned}$$

Betrachte $h := \vartheta^4 - g$ mit $\Lambda = \Gamma_\vartheta$ und $\Lambda^* = \Gamma[2]$. Es gilt $k = 2$, sowie $l = 6$ und $n = 2$. Wegen

$$\alpha_h(m,E) = 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \le m \le \frac{24}{12} = 2$$

gilt nach Satz (1.15) $h \equiv 0$, also $g = \vartheta^4$. Die Eindeutigkeit der FOURIER-Koeffizienten liefert bei Koeffizientenvergleich

$$\alpha_g(m) = \delta_4(m). \qquad \square$$

Als direkte Folgerung aus $\delta_4(m) \geq 8$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erhält man den Vier-Quadrate-Satz

**(2.4) Korollar**
Jede natürliche Zahl ist die Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen. $\diamond$