Modulformen zu Kongruenzgruppen II

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 07.05.2008

Max Brölsch

Ziel des Vortrags ist, noch einige allgemeine Aussagen über Spitzenformen zu Kongruenzgruppen zu treffen und anschließend die Modulformen zu $\Gamma_0[p]$ genauer zu untersuchen, insbesondere ihr Transformationsverhalten unter der vollen Modulgruppe Γ.

§1 Spitzenformen zu Kongruenzgruppen

(1.1) Definition (Spitzenformen zu Kongruenzgruppen)
Sei $k \in \mathbb{Z}$ und Λ eine Kongruenzgruppe mit abelschem Charakter χ. Eine Modulform $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ heißt *Spitzenform*, falls $f|_k M$ für jedes $M \in \Gamma$ eine Nullstelle bei ∞ hat. Der Unterraum der Spitzenformen wird mit $\mathbb{S}_k(\Lambda, \chi)$ bezeichnet. $\diamond$

(1.2) Bemerkung
Sei $k \in \mathbb{Z}$ und Λ eine Kongruenzgruppe mit abelschem Charakter χ. Für eine Spitzenform $f \in \mathbb{S}_k(\Lambda, \chi)$ und $M \in \Gamma$ beliebig gilt dann:

a) Ist χ ein abelscher Charakter mod n von Λ, dann hat die Fourierentwicklung von $f|_k M$ die Form
$$f|_k M(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m, M) e^{2\pi i m\tau/p}$$
das heißt, $\alpha_f(0, M) = 0$ für alle $M \in \Gamma$.

b) Mit $f \in \mathbb{S}_k(\Lambda, \chi)$ gilt auch $f|_k M \in \mathbb{S}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$ $\diamond$

Beweis
a) Ist χ ein abelscher Charakter mod n so besitzt $f|_k M$ die Fourierentwicklung
$$f|_k M(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m, M) e^{2\pi i m\tau/p}$$
Da jetzt $f|_k M$ für jedes $M \in \Gamma$ eine Nullstelle bei ∞ besitzt, folgt die Behauptung.

b) Da für $\chi_M(K) = \chi(MKM^{-1})$ die Abbildung

$$\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \to \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M), f \mapsto f|_k M$$

ein Vektorraumisomorphismus ist, folgt zunächst $f|_k M \in \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$. Da $(f|M)|N = f|MN$ besitzt auch $(f|_k M)|_k N$ für jedes $N \in \Gamma$ eine Nullstelle bei unendlich. □

(1.3) Satz

Sei $k \in \mathbb{N}$, Λ eine Kongurenzgruppe, χ ein abelscher Charakter mod n von Λ und $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$. Dann gilt für $\widetilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \tau \mapsto \mathrm{Im}(\tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)|$:

a) Die Funktion $\widetilde{f}$ ist invariant unter Γ, das heißt $\widetilde{f}(L\tau) = f(\tau)$ für alle $L \in \Lambda$.

b) Die Funktion $\widetilde{f}$ ist genau dann auf $\mathbb{H}$ beschränkt, wenn f eine Spitzenform ist.

c) Ist $f \in \mathbb{S}_k(\Lambda, \chi)$, dann gilt für die Fourierkoeffizienten $\alpha_f(m; M) = \mathcal{O}(m^{k/2})$ für alle $M \in \Gamma$. ◇

Beweis

a) Sei $L \in \Lambda$ beliebig, $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(L\tau) &= \mathrm{Im}(L\tau)^{k/2} \cdot |f(L\tau)| \\
&= \mathrm{Im}(L\tau)^{k/2} \cdot |(c\tau + d)^k f|_k L(\tau)| \\
&\overset{f \in \mathbb{M}_k(\Lambda,\chi)}{=} \mathrm{Im}(L\tau)^{k/2} |(c\tau + d)^k| |f(\tau)| \\
&\overset{\mathrm{XXVIII}(1.1)}{=} \left(\frac{\det(L)}{(c\tau + d)^2} \right)^{k/2} \mathrm{Im}(\tau)^{k/2} \cdot |(c\tau + d)^k| \cdot |f(\tau)| \\
&\overset{\det(L)=1}{=} \frac{1}{(c\tau + d)^k} \cdot |(c\tau + d)^k| \cdot \mathrm{Im}(\tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)| \\
&= \widetilde{f}(\tau).
\end{aligned}$$

b) Es gilt: $\widetilde{f}$ ist nach [K]3.1.6 genau dann auf $\mathbb{F}$ beschränkt, wenn $\alpha_f(0; E) = 0$ gilt. Weiter sei $\widetilde{\Lambda} = \{\pm L; l \in \Lambda\}$ und $l = [\Gamma : \widetilde{\Lambda}]$. Nach dem Vortrag über Untergruppen der Modulgruppe ist dann für ein Vertretersystem $M_1, ..., M_l$ der Rechtsnebenklassen $\mathbb{F}(\Lambda) = \bigcup_{1 \le j \le l} M_j \overline{\mathbb{F}}$ ein Fundamentalbereich von Λ. Nun gilt analog: $\widetilde{f}$ ist beschränkt auf $\mathbb{F}(\Lambda)$ genau dann, wenn es auf $M_j \overline{\mathbb{F}}$ beschränkt ist, für jedes j mit $1 \le j \le l$. Das ist genau dann der Fall, wenn $\alpha_f(0, M_j) = 0$ für $1 \le j \le l$.

Sei nun $M \in \Gamma$ beliebig, dann existiert ein $N \in \Lambda$ und ein j mit $1 \leq j \leq l$, so dass gilt: $\alpha_f(0, M) = \alpha_f(0, NM_j)$, nach der Wahl der M_j. Damit folgt aber:

$$\alpha_f(0, M) = \alpha_f(0, NM_j) = \chi(N) \cdot \alpha_f(0, M_j) = 0,$$

also hat $f|_k M$ für jedes $M \in \Gamma$ eine Nullstelle bei ∞.

c) Nach dem bereits Gezeigten existiert für jedes $M \in \Gamma$ ein $C_M < \infty$ so dass gilt:

$$\widetilde{f|M}(\tau) \leq C_M \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Sei nun C das Supremum der C_M. Dies ist endlich, da es genügt das Supremum über die C_{M_j} eines Vertretersystems $M_1, \ldots, M_l$ der Rechtsnebenklassen zu bilden und die Menge der C_{M_j} ist endlich. Für die Fourierkoeffizienten ergibt sich damit nach [K]3.1.2 (4) für $y > \gamma > 0$ beliebig:

$$\begin{aligned}
|\alpha_f(m, M)| &= \frac{1}{n} \cdot e^{2\pi m y/n} \cdot \left| \int_0^n f|M(x+iy) \cdot e^{-2\pi i m x/n} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot e^{2\pi m y/n} \cdot \int_0^n \left| f|M(x+iy) \cdot e^{-2\pi i m x/n} \right| dx \\
&= \frac{1}{n} \cdot e^{2\pi m y/n} y^{-k/2} \cdot \int_0^n \widetilde{f|M}(x+iy) dx \\
&\leq e^{2\pi m y/n} y^{-k/2} \cdot C
\end{aligned}$$

Setzt man $y = 1/m$ ein folgt:

$$|\alpha_f(m, M)| \leq C \cdot e^{2\pi/n} \cdot m^{k/2}$$

Damit folgt $\alpha_f(m, M) = \mathcal{O}(m^{k/2})$. □

(1.4) Korollar
Es gilt $\mathbb{S}_2(\Gamma_0[2]) = \{0\}$ ◇

Beweis
$\Gamma_0[2]$ ist eine Untergruppe vom Index 3 in Γ mit Vertretersystem E, J, U^2. Für $f \in \mathbb{S}_2(\Gamma_0[2])$ folgt dann:

$$\pi(f) = f \cdot f|_2 J \cdot f|_2 U^2 \in \mathbb{S}_6.$$

Damit ist aber $\pi(f) = 0$ nach [K]3.4.1, also auch $f = 0$. □

(1.5) Bemerkung
A.Wiles zeigte, dass jede semistabile elliptische Kurve modular ist, also von einer Spitzenform vom Gewicht 2 zu $\Gamma_0[r]$ kommt. Nach G.Frey kann man jeder nicht-trivialen Lösung der Fermat-Gleichung $x^n + y^n = y^n$ für $n \geq 3$ eine elliptische Kurve zuordnen, die von einer nicht-trivialen Spitzenform vom Gewicht 2 zu $\Gamma_0[2]$ kommt. Nach dem Korollar existiert keine solche Spitzenform und damit auch keine nicht-triviale Lösung der Fermat-Gleichung für $n \geq 3$. ◇

§2 Automorphe Funktionen unter $\Gamma_0[p]$

In diesem Abschnitt werden unter $\Gamma_0[p]$ automorphe Funktionen definiert und einige Eigenschaften untersucht, die später nützlich sind um einige Kongruenzen der Fourierkoeffizienten von $j(\tau)$ zu bestimmen.

(2.1) Definition (Automorphe Funktionen)
Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *automporh* unter $\Gamma_0[p]$, falls gilt:

a) f ist meromorph auf $\mathbb{H}$,

b) $f(V\tau) = f(\tau)$ für jede Transformation V aus der Kongruenzgruppe $\Gamma_0[p]$,

c) f besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$f(t) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$$

◇

Zunächst soll eine explizite Darstellung von automorphen Formen unter $\Gamma_0[p]$ gezeigt werden, dazu benötigt man das folgende

(2.2) Lemma
Sei V aus $\Gamma_0[p]$ und für $0 \leq \lambda \leq p-1$ sei $T_\lambda(\tau) = (\tau + \lambda)/p$. Dann existiert eine Zahl μ mit $0 \leq \mu \leq p-1$ und eine Transformation W_μ aus $\Gamma_0(p^2)$, so dass:

$$T_\lambda V = W_\mu T_\mu$$

Durchläuft dabei λ alle Zahlen von 0 bis $p-1$, durchläuft auch μ alle Zahlen von 0 bis $p-1$. ◇

Beweis
Sei V aus $\Gamma_0[p]$,

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

mit $v_3 \equiv 0 \pmod p$ und λ beliebig mit $0 \leq \lambda \leq p-1$. Gesucht ist also eine ganze Zahl μ mit $0 \leq \mu \leq p-1$ und eine Transformation W_μ in $\Gamma_0(p^2)$,

$$W_\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

mit $w_3 \equiv 0 \pmod{p^2}$ so dass gilt:

$$T_\lambda V = W_\mu T_\mu \tag{1}$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} & T_\lambda V = W_\mu T_\mu \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} v_1 + \lambda v_3 & v_2 + \lambda v_4 \\ p v_3 & p v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 \mu + w_2 p \\ w_3 & w_3 \mu + w_4 p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) folgt bereits, dass die Determinante von W_μ, falls W_μ die Gleichung (1) löst, in jedem Fall 1 ist. Ein Vergleich der Einträge ergibt dabei:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 + \lambda v_3 & \text{und} \\ w_3 = p v_3 & \text{sowie} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} w_1 \mu + w_2 p = v_2 + \lambda v_4 & \text{und} \\ w_3 \mu + w_4 p = p v_4 \end{cases} \tag{3}$$

Damit sind w_1 und w_3 schon bestimmt und es gilt nach Vorraussetzung $p \mid v_3$ woraus $p^2 \mid w_3$ folgt. Einsetzen von (2) in (3) ergibt:

$$\begin{cases} (v_1 + \lambda v_3)\mu + w_2 p = v_2 + \lambda v_4 & \text{und} \\ p v_3 \mu + w_4 p = p v_4 \end{cases} \tag{4}$$

Nach Vorraussetzung gilt $v_1 v_4 - v_2 v_3 = 1$ und $p \mid v_3$. Damit folgt $p \nmid v_2$ und $p \nmid v_4$. Da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist, ist die Kongruenz $\mu v_1 \equiv v_2 + \lambda v_4 (\text{mod } p)$ für genau ein

μ mit $0 \leq \mu \leq p-1$ erfüllt. Des weiteren durchläuft $v_2 + \lambda v_4 (\text{mod } p)$ alle Zahlen zwischen 0 und $p-1$ wenn λ dies tut, und damit durchläuft auch μ alle diese Zahlen. Mit diesem μ ist auch die Kongruenz

$$(v_1 + \lambda v_3)\mu \equiv v_2 + \lambda v_4 (\text{mod } p)$$

erfüllt und daraus folgt auch die Existenz einer ganzen Zahl w_2, so dass

$$(v_1 + \lambda v_3)\mu + w_2 p = v_2 + \lambda v_4$$

gilt, also die erste Gleichung in (4) erfüllt ist. Die zweite Gleichung in (4) ergibt $w_4 = v_4 - v_3\mu$ und damit erhält man insgesamt die gesuchte Lösung mit

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \lambda v_3 & w_2 \\ p v_3 & v_4 - v_3 \mu \end{pmatrix}.$$

□

Mit Hilfe des Lemmas kann man nun explizit unter $\Gamma_0[p]$ automorphe Funktionen konstruieren:

(2.3) Satz
Sei f automorph unter Γ und p eine Primzahl. Definiere

$$f_p(\tau) = \frac{1}{p} \sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau + \lambda}{p}\right). \tag{5}$$

Dann ist f_p automorph unter $\Gamma_0[p]$. Hat f die Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} \alpha(n) e^{2\pi i n \tau}, \tag{6}$$

so besitzt f_p die Fourier Entwicklung

$$f_p(\tau) = \sum_{n=-[m/p]}^{\infty} \alpha(np) e^{2\pi i n \tau}. \tag{7}$$

◇

Beweis
Zunächst wird mithilfe des Lemmas (2.2) gezeigt, dass die Darstellung aus (5) tatsächlich eine unter $\Gamma_0[p]$ invariante Funktion liefert. Sei dazu $V \in \Gamma_0[p]$ beliebig. Dann gilt

$$f_p(V\tau) = \frac{1}{p} \sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{V\tau + \lambda}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{\lambda=0}^{p-1} f(T_\lambda V \tau)$$

mit den Bezeichnungen aus (2.2). Nach diesem Lemma existiert nun ein $\mu \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $W_\mu \in \Gamma_0[p^2]$, so dass $T_\lambda V = W_\mu T_\mu$ gilt. Damit folgt

$$f_p(V\tau) = \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f(W_\mu T_\mu \tau) \overset{W_\mu \in \Gamma}{=} \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f(T_\mu \tau) = \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+\mu}{p}\right) = f_p(\tau).$$

Nun muss noch die Fourierentwicklung (7) untersucht werden:

$$\begin{aligned} f_p(\tau) &= \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1}\sum_{n=-m}^{\infty} \alpha(n) e^{2\pi i n(\tau+\lambda)/p} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{n=-m}^{\infty} \alpha(n) e^{2\pi i n\tau/p} \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p} \end{aligned}$$

Die Summen dürfen dabei vertauscht werden, da die Fourierentwicklung (6) für $\mathrm{Im}(\tau) \geq \gamma > 0$ absolut gleichmäßig konvergiert. Für $p \mid n$ existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit $c \cdot p = n$, so dass gilt

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i c\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} 1 = p.$$

Für $p \nmid n$ existieren $c, r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq p-1$ und $cp + r = n$, so dass

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i c\lambda} e^{2\pi i \lambda r/p} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i r\lambda/p} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \left(e^{2\pi i r/p}\right)^\lambda = \frac{1-\left(e^{2\pi i r/p}\right)^p}{1-e^{2\pi i r/p}} = 0.$$

Insgesamt folgt für die endliche Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \nmid n, \\ p & \text{für } p \mid n. \end{cases}$$

Eingesetzt folgt damit

$$\begin{aligned} f_p(\tau) &= \frac{1}{p}\sum_{n=-m}^{\infty} \alpha(n) e^{2\pi i n\tau/p} \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p} \\ &= \sum_{n=-m,\, p\mid n}^{\infty} \alpha(n) e^{2\pi i n\tau/p} \\ &= \sum_{n=-[m/p]}^{\infty} \alpha(np) e^{2\pi i n\tau}, \end{aligned}$$

also genau die Darstellung aus (7). Mit dieser Fourierdarstellung folgt auch die Meromorphie von f_p und damit insgesamt, dass f_p unter $\Gamma_0[p]$ automorph ist. □

(2.4) Satz
Sei f automorph unter $\Gamma_0[p]$ und beschränkt auf $\mathbb{H}$. Dann ist f konstant. ◇

Beweis
Sei f automorph unter $\Gamma_0[p]$ und V aus Γ beliebig, $V \notin \Gamma_0[p]$. Nach einer Aussage aus dem dritten Vortrag existiert zu V ein P aus $\Gamma_0[p]$ und eine ganze Zahl k mit $0 \leq k < p$, so dass

$$V = PJT^k. \tag{8}$$

Für jedes $k = 0, 1, \ldots, p-1$ definiere

$$\Gamma_k = \{PJT^k : P \in \Gamma_0[p]\}$$

und $\Gamma_p = \Gamma_0[p]$. Diese Mengen bilden dann eine disjunkte Zerlegung von Γ, nach dem Beweis von (8). Für festes k und V_k aus Γ_k beliebig, definiere eine Funktion f_k auf $\mathbb{H}$ durch

$$f_k(\tau) = f(V_k\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Die Defintion der f_k hängt nicht von der Wahl des V_k ab denn es gilt

$$f_k(\tau) = f(V_k\tau) = f(PJT^k\tau) = f(JT^k\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Insbesondere folgt $f_p(\tau) = f(\tau)$ für $\tau \in \mathbb{H}$, da f automorph ist unter $\Gamma_0[p]$ nach Voraussetzung. Sei nun V aus $\Gamma \setminus \Gamma_0[p]$ beliebig , dann existiert zu $V_kV \in \Gamma \setminus \Gamma_0[p]$, mit $k \leq p$ ein $W \in \Gamma_0[p]$ und eine ganze Zahl m mit $0 \leq m \leq p$, so dass

$$V_kV = WJT^m$$

Nach Definition der f_k gilt damit

$$f_k(V\tau) = f(V_kV\tau) = f(WJT^m\tau) = f_m(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Da die Γ_k eine disjunkte Zerlegung von Γ bilden, durchläuft m alle Zahlen von 0 bis p wenn k dies tut, es gibt also eine Permutation σ_V auf $\{0, \ldots, p\}$, die nur von der Wahl von V abhängt, so dass

$$f_k(V\tau) = f_{\sigma_V(k)}(\tau) \text{ für alle } 0 \leq k \leq p$$

Für ein beliebiges z aus $\mathbb{H}$ definiere

$$\varphi(\tau) = \prod_{k=0}^{p} (f_k(\tau) - f(z)) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Für V aus Γ beliebig gilt nun:

$$\varphi(V\tau) = \prod_{k=0}^{p}(f_k(V\tau) - f(z)) = \prod_{k=0}^{p}(f_{\sigma_V(k)}(\tau) - f(z)) = \varphi(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Offensichtlich ist φ damit eine Modulform vom Gewicht 0, da die übrigen beiden Eigenschaften (Meromorphie auf $\mathbb{H}$ und Fourierentwicklung) sofort aus der Defintion von f folgen. Des weiteren ist φ beschränkt auf $\mathbb{H}$, da f beschränkt ist. Damit ist φ holomorph auf $\mathbb{H}$ und damit nach XXIX(5.1) konstant, also gilt $\varphi(\tau) = \varphi(z)$ für alle τ aus $\mathbb{H}$. Da $\varphi(z) = \prod_{k=0}^{p-1}(f_k(\tau) - f(z)) \cdot (f_p(z) - f(z)) = 0$ folgt $\varphi(z) \equiv 0$. Für $\tau = i$ gilt insbesondere:

$$0 = \prod_{k=0}^{p} f_k(i) - f(z)$$

Also $f(z) = f_k(i)$ für ein k. Da aber z beliebig war, nimmt f maximal die Werte $f_0(i), f_1(i), ..., f_p(i)$ an und ist damit konstant. □

§3 Transformationsverhalten

Nun soll noch das Transformationsverhalten automorpher Funktionen unter der vollen Modulgruppe Γ, erzeugt von

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

untersucht werden. Da offensichtlich $T \in \Gamma_0[p]$ für alle p gilt genügt es, das Transformationsverhalten unter J zu untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst folgendes:

(3.1) Lemma
Sei $T_\lambda\tau = (\tau + \lambda)/p$. Dann existiert für jedes λ mit $0 < \lambda \leq p-1$ eine Zahl μ mit $0 \leq \mu \leq p-1$ und ein $V \in \Gamma_0[p]$, so dass

$$T_\lambda J = V T_\mu \tag{9}$$

dabei durchläuft μ alle Zahlen zwischen 1 und $p-1$, wenn λ die Zahlen zwischen 1 und $p-1$ durchläuft. ◇

Beweis
Gesucht ist also eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0[p]$ so dass gilt:

$$T_\lambda J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T_\mu \tag{10}$$

Einsetzen und umformen von (10) ergibt

$$\begin{aligned} T_\lambda J &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T_\mu \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a\mu + bp \\ c & c\mu + dp \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wähle also $a = \lambda$ und $c = p$. Sei μ so gewählt, dass es die Lösung der Kongruenz

$$a\mu \equiv -1 (\text{mod } p) \Leftrightarrow \lambda\mu \equiv -1 (\text{mod } p)$$

ergibt. Ein solches μ existiert, liegt im Interval $0 < \mu \leq p - 1$, ist eindeutig und durchläuft alle Zahlen zwischen 1 und $p - 1$ wenn λ dies tut. Sei b jetzt noch so gewählt, dass $a\mu + bp = -1$ und wähle $d = -\mu$. Nun gilt offensichtlich wegen (10) und $c = p$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0[p]$$

□

(3.2) Satz
Sei f automorph unter Γ und sei p Primzahl. Weiter sei f_p konstruiert wie in (2.3). Dann gilt

$$f_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) = f_p(\tau) + \frac{1}{p} f(p\tau) - \frac{1}{p} f\left(\frac{\tau}{p}\right) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}. \tag{11}$$

◇

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned}
pf_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{J\tau+\lambda}{p}\right) \\
&= f\left(\frac{J\tau}{p}\right) + \sum_{\lambda=1}^{p-1} f(T_\lambda J\tau) \\
&\overset{(3.1)}{=} f\left(-\frac{1}{\tau p}\right) + \sum_{\mu=1}^{p-1} f(VT_\mu\tau) \\
&\overset{f\in\mathbb{M}_0}{=} f(\tau p) + \sum_{\mu=0}^{p-1} f(T_\mu\tau) - f\left(\frac{\tau}{p}\right) \\
&= f(\tau p) + pf_p(\tau) - f\left(\frac{\tau}{p}\right) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Division durch p ergibt die Behauptung. □