Modulformen zu Kongruenzuntergruppen III

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 21.05.2008

Matthias Deipenbrock

Die absolute Invariante j hat eine Fourierentwicklung der Form

$$j(\tau) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n,$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$, wobei $x = e^{2\pi i \tau}$ mit ganzzahligen Koeffizienten $c(n)$. Ziel dieses Vortrags ist es, folgende Kongruenzen für diese Koeffizienten herzuleiten:

$$\begin{aligned} c(2n) &\equiv 0 \pmod{2^{11}}, \\ c(3n) &\equiv 0 \pmod{3^5}, \\ c(5n) &\equiv 0 \pmod{5^2}, \\ c(7n) &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Wir skizzieren das Vorgehen, mit dem man diese Kongruenzen erhält, am Beispiel der Kongruenzen modulo 5^2. Wir betrachten die Funktion

$$f_5(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(5n)x^n,$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$, wobei $x = e^{2\pi i \tau}$, die man erhält, wenn man die fünften Koeffizienten der Fourierentwicklung von f auswählt. Dann zeigen wir, dass eine Identität der Form

$$f_5(\tau) = 25 \left(a_1\Phi(\tau) + a_2\Phi^2(\tau) + \cdots + a_k\Phi^k(\tau) \right)$$

existiert, wobei die a_j ganzzahlig sind und die noch zu definierende Funktion Φ eine Darstellung als Potenzreihe in $x = e^{2\pi i \tau}$ mit ganzzahligen Koeffizienten besitzt. Durch einen Koeffizientenvergleich sieht man dann, dass jeder Koeffizient von f_5 durch 25 teilbar ist.

§1 Die univalente Funktion Φ

In diesem Abschnitt wird zunächst die Funktion Φ definiert und anschließend werden ihre Eigenschaften diskutiert.

— *Die Funktion* $\varphi(\tau) = \Delta(q\tau)/\Delta(\tau)$ —

(1.1) Definition (Valenz)
Sei G eine Untergruppe der vollen Modulgruppe Γ und sei f eine unter G automorphe Funktion. Dann nennen wir die Anzahl der Pole von f im Abschluss ihres Fundamentalbereichs (einschließlich Vielfachheiten) *Valenz*. Eine Funktion heißt *univalent* auf G, wenn sie automorph unter G ist und Valenz 1 hat. $\diamond$

Eine univalente Funktion spielt in G dieselbe Rolle, die j in der vollen Modulgruppe Γ spielt. Denn j ist automorph unter Γ und hat einen Pol der Ordnung 1 bei ∞. Unser nächstes Ziel ist es, eine univalente Funktion auf der Untergruppe $\Gamma_0[p]$ zu konstruieren. Dies geschieht mit Hilfe der Diskriminante

$$\begin{aligned}\Delta &= (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2 \\ &= g_2^3 - 27g_3^2.\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass Δ Periode 1 hat und die Fourier-Entwicklung

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot e^{2\pi i n\tau}$$

besitzt. Dabei sind die $\tau(n)$ ganzzahlig mit $\tau(1) = 1$ und $\tau(2) = -24$. Des Weiteren ist Δ nicht unter allen Transformationen aus Γ invariant; es gilt nämlich $\Delta \in \mathbb{M}_{12}$, also

$$\Delta(M\tau) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau), \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}, \quad \text{falls } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Insbesondere gilt also

$$\Delta(\tau + 1) = \Delta(\tau) \quad \text{und} \quad \Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12}\Delta(\tau)$$

Für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Obwohl die Diskriminante selbst also nicht invariant unter Γ ist, kann man sie verwenden um Funktionen zu konstruieren, die für jedes $q \in \mathbb{Z}$ automorph unter $\Gamma_0[q]$ sind.

Um eine solche Funktion zu konstruieren, benötigen wir noch folgenden

(1.2) Hilfssatz
Sind f und g für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihen,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = 1$ und $g(z) \neq 0$ für alle $|z| < 1$, so ist auch f/g eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$. ⋄

Beweis
Die Funktionen f und g sind holomorph für alle $|z| < 1$, also ist auch f/g holomorph, da $g(z) \neq 0$ gilt für alle $|z| < 1$. Somit ist f/g in eine Potenzreihe mit Koeffizienten c_n entwickelbar. Wir multiplizieren mit g und betrachten somit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Mit einem Koeffizientenvergleich und der Voraussetzung $b_0 = 1$ folgt nun:

$$c_0 = a_0 \in \mathbb{Z} \qquad \text{und}$$

$$a_m = c_m + \sum_{n=0}^{m-1} c_n b_{m-n}$$

für alle $m \geq 1$, also ist

$$c_m = a_m - \sum_{n=0}^{m-1} c_n b_{m-n}$$

ganzzahlig für alle $m \geq 1$. □

Nun konstruieren wir mit Hilfe der Diskriminante die unter $\Gamma_0[q]$ automorphe Funktion φ:

(1.3) Satz
Für ein festes $q \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathbb{H}$ sei

$$\varphi(\tau) := \frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Dann ist φ automorph unter $\Gamma_0[q]$. Darüber hinaus hat die Fourier-Entwicklung von φ die Form

$$\varphi(\tau) = x^{q-1} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right),$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$, wobei $x = e^{2\pi i \tau}$, mit $b_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ⋄

Beweis
Zunächst beschaffen wir uns die Fourier-Entwicklung. Wir haben

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= (2\pi)^{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n = (2\pi)^{12} \cdot x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau(n+1)x^n \\ &= (2\pi)^{12} \cdot x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^n\right),\end{aligned}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $x = e^{2\pi i \tau}$, wenn man $\tau(1) = 1$ verwendet. Dementsprechend gilt

$$\Delta(q\tau) = (2\pi)^{12} \cdot x^q \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^{nq}\right) \qquad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}$$

und somit

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{(2\pi)^{12} \cdot x^q \cdot (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^{nq})}{(2\pi)^{12} \cdot x \cdot (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^n)} \\ &= x^{q-1} \cdot \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^{nq}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^n} \\ &\overset{(1.2)}{=} x^{q-1} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) \qquad \text{mit } b_n \in \mathbb{Z} \text{ für alle } n \geq 1.\end{aligned}$$

Dabei ist (1.2) anwendbar, da $\tau(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig ist, $|x| = \left|e^{2\pi i \tau}\right| < 1$ und damit auch $|x^q| < 1$ für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt und die Diskriminante keine Nullstellen auf $\mathbb{H}$ hat.

Die Funktion φ ist meromorph in $\mathbb{H}$ als Quotient zweier meromorpher Funktionen, da Δ meromorph in $\mathbb{H}$ ist. Zu zeigen bleibt noch, dass φ invariant unter $\Gamma_0[q]$ ist. Sei dazu

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q), \;\; \text{also } c \equiv 0 \pmod{q},$$

das heißt es existiert ein $c_1 \in \mathbb{Z}$ mit $c = c_1 q$. Damit erhalten wir also

$$\Delta(M\tau) = (c_1 q\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau).$$

Andererseits gilt

$$q \cdot M\tau = q \cdot \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{aq\tau + bq}{c_1 q\tau + d} = N(q\tau) \qquad \text{mit } N = \begin{pmatrix} a & bq \\ c_1 & d \end{pmatrix}.$$

Wegen
$$\det N = ad - c_1 bq = ad - bc = 1$$
ist $N \in \Gamma$. Darum gilt
$$\Delta(qM\tau) = \Delta(N(q\tau)) = (c_1 q\tau + d)^{12} \cdot \Delta(q\tau)$$
und schließlich
$$\begin{aligned}\varphi(M\tau) &= \frac{\Delta(qM\tau)}{\Delta(M\tau)} = \frac{(c_1 q\tau + d)^{12} \cdot \Delta(q\tau)}{(c_1 q\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau)} \\ &= \frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)} = \varphi(\tau)\end{aligned}$$
Damit ist φ automorph unter $\Gamma_0[q]$. □

An der Fourierentwicklung lesen wir ab, dass die Funktion φ wegen $x = e^{2\pi i\tau} \longrightarrow 0$ für $\tau \to \infty$ eine Nullstelle der Ordnung $q-1$ bei ∞ hat. Da $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ hat sie außerdem keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{H}$.

Als nächstes zeigen wir, dass φ an der Spitze $\tau = 0$ des Fundamentalbereiches von $\Gamma_0[q]$ nicht verschwindet.

(1.4) Satz
Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und $q > 1$ gilt
$$\varphi\left(-\frac{1}{q\tau}\right) = \frac{1}{q^{12} \cdot \varphi(\tau)},$$
also $\varphi(\tau) \to \infty$ für $\tau \to 0$. ◇

Beweis
Da mit τ auch $q\tau$ in $\mathbb{H}$ liegt und $\Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12}\Delta(\tau)$ gilt, erhalten wir
$$\Delta\left(-\frac{1}{q\tau}\right) = (q\tau)^{12}\Delta(q\tau),$$
also gilt
$$\varphi\left(-\frac{1}{q\tau}\right) = \frac{\Delta\left(-\frac{q}{q\tau}\right)}{\Delta\left(-\frac{1}{q\tau}\right)} = \frac{\Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\Delta\left(-\frac{1}{q\tau}\right)} = \frac{\tau^{12}\Delta(\tau)}{(q\tau)^{12}\Delta(q\tau)} = \frac{1}{q^{12} \cdot \varphi(\tau)}.$$
Die Funktion φ hat bei ∞ eine Nullstelle, somit gilt
$$\varphi\left(-\frac{1}{q\tau}\right) \longrightarrow 0 \;\text{ für } \tau \to 0.$$

Mit der oben gezeigten Identität erhalten wir also

$$\frac{1}{q^{12} \cdot \varphi(\tau)} \longrightarrow 0 \ \text{ für } \tau \to 0$$

und damit schließlich

$$\varphi(\tau) \to \infty \ \text{ für } \tau \to 0.$$

□

— Die univalente Funktion $\Phi(\tau)$ —

Die Funktion φ hat eine Nullstelle der Ordnung $q-1$ bei ∞ und keine weiteren Nullstellen. Man kann zeigen, dass sie ebenso viele Pole hat und daher hat sie Valenz $q-1$. Wir suchen eine univalente Funktion auf $\Gamma_0[q]$ und betrachten daher φ^α mit $\alpha = \frac{1}{q-1}$. Die Fourier-Entwicklung von φ^α hat nicht notwendigerweise ganzzahlige Koeffizienten, da

$$\varphi^\alpha(\tau) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)^\alpha$$

gilt. Allerdings kennen wir die Produktdarstellung der Diskriminante:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24},$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und $x = e^{2\pi i \tau}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau) = \frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)} &= \frac{(2\pi)^{12} \cdot x^q \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{nq})^{24}}{(2\pi)^{12} \cdot x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}} \\
&= x^{q-1} \cdot \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{nq})^{24}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}}.
\end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Produkte, können wir den Exponenten rausziehen und erhalten

$$\varphi(\tau) = x^{q-1} \cdot \left(\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{nq})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)}\right)^{24}.$$

Wenn man die holomorphen Produkte nun „ausmultipliziert“, so findet man die Darstellung

$$\varphi(\tau) = x^{q-1} \cdot \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{nq}}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n}\right)^{24}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α_n und β_n. Darüber hinaus ist $\beta_0 = 1$ also kann aufgrund der Nullstellenfreiheit von Δ der Hilfssatz (1.2) angewendet werden und wir erhalten

$$\varphi(\tau) = x^{q-1} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n\right)^{24}, \qquad d(n) \in \mathbb{Z}.$$

Mit $\alpha = \frac{1}{q-1}$ erhalten wir also

$$\varphi^{\alpha}(\tau) = x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n\right)^{24\alpha}.$$

Diese Fourierreihe hat sicherlich ganzzahlige Koeffizienten, falls $24 \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$ ist.Dies ist der Fall, wenn 24 durch $q-1$ teilbar ist. Das tritt auf für $q \in \{2,3,4,5,7,9,13,25\}$ und bringt uns schließlich auf folgende

(1.5) Definition

Falls 24 durch $q-1$ teilbar ist, setze $\alpha = \frac{1}{q-1}$ und $r = 24 \cdot \alpha$. Wir definieren die Funktion Φ über

$$\Phi(\tau) := \varphi^{\alpha}(\tau) = \left(\frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{r}.$$

$\diamond$

Da die Eta-Funktion holomorph ist und $\eta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt, ist auch die Funktion Φ holomorph auf $\mathbb{H}$ und es gilt $\Phi(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Die Fourierreihe

$$\Phi(\tau) = x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n\right)^{r}$$

zeigt, dass Φ eine Nullstelle der Ordnung 1 bei ∞ hat und dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi(\tau)} &= \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n\right)^{-r} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n}\right)^{r} \\
&\overset{(1.2)}{=} \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^{r}, \qquad \text{mit } r \in \mathbb{Z} \text{ und } a_n \in \mathbb{Z} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{x} + I_1(x)
\end{aligned}$$

gilt, wobei $I_1(x)$ eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Der Hilfssatz (1.2) ist anwendbar, da $\Phi(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und somit auch $1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n \neq 0$ gilt für alle $x = e^{2\pi i \tau}$.

— *Die Invarianz von Φ unter Transformationen aus $\Gamma_0[q]$* —

Die Funktion φ ist automorph unter $\Gamma_0[q]$, also haben wir $\varphi(M\tau) = \varphi(\tau)$ für jedes Element $M \in \Gamma_0[q]$. Zieht man nun $(q-1)$-te Wurzeln, so hat man

$$\Phi(M\tau) = \varphi^{\frac{1}{q-1}}(M\tau) = \varepsilon \cdot \varphi^{\frac{1}{q-1}}(\tau) = \varepsilon \cdot \Phi(\tau), \qquad \text{mit } \varepsilon^{q-1} = 1.$$

Unser nächster Satz zeigt, dass sogar $\varepsilon = 1$ gilt, wenn $24/(q-1)$ eine gerade ganze Zahl und q eine Primzahl ist. Dies tritt auf für $q \in \{2,3,5,7,13\}$. Für diese Werte von q ist die Funktion Φ automorph unter $\Gamma_0[q]$. Um dies zu beweisen, greifen wir auf die Darstellung von Φ über die Etafunktion und deren Eigenschaften zurück.

(1.6) Satz
Sei $q \in \{2,3,5,7,13\}$ und $r = \frac{24}{q-1}$.

Dann ist die Funktion

$$\Phi(\tau) = \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r$$

automorph unter der Untergruppe $\Gamma_0[q]$. ◇

Beweis
Für $q = 2$ haben wir $r = 24$ und $\alpha = 1$, also $\Phi(\tau) = \varphi(\tau)$, und φ ist automorph nach (1.3).

Sei also $q \geq 3$ und sei weiter $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0[q]$, also $ad - bc = 1$ und $c \equiv 0 \pmod q$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $c \geq 0$ gilt, ansonsten betrachte $-M \in \Gamma_0[q]$.

1. Fall $c = 0$:

   Dann gilt $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ und $ad = 1$. Damit gilt dann $a = d = 1$ oder $a = d = -1$. Da $M\tau = (-M)\tau$ gilt, genügt es, die erste Möglichkeit zu betrachten, mit der üblichen Bezeichnung $T\tau = \tau + 1$ gilt also $M = T^b$. Aus dem Vortrag „Die

Eta-Funktion" wissen wir, dass $\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \cdot \eta(\tau)$ gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau+1) &= \left(\frac{\eta(q(\tau+1))}{\eta(\tau+1)}\right)^r = \left(\frac{\eta(q\tau+q)}{\eta(\tau+1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{e^{\frac{\pi i q}{12}}\eta(q\tau)}{e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau)}\right)^r = e^{\frac{\pi i(q-1)r}{12}} \cdot \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r \\
&= e^{\pi i\frac{(q-1)\cdot 24}{(q-1)\cdot 12}} \cdot \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r = e^{2\pi i} \cdot \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r \\
&= \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r = \Phi(\tau).
\end{aligned}$$

2. Fall $c > 0$:

   Es gilt $c = c_1 q$ für ein $c_1 \in \mathbb{Z}$ mit $c_1 > 0$. Dann gilt nach dem Satz von Dedekind für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ mit $c > 0$ (siehe Satz (3.2) aus dem Vortrag „Die Etafunktion")

   $$\eta(M\tau) = \exp\left(\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)\right) \cdot (-i(c\tau+d))^{\frac{1}{2}}\,\eta(\tau)$$

   und außerdem

   $$\eta(qM\tau) = \eta\left(q \cdot \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\right) = \eta\left(\frac{qa\tau+qb}{c_1q\tau+d}\right) = \eta(M_1(q\tau))$$

   mit $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & bq \\ c_1 & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Wegen $c_1 > 0$ erhalten wir damit also

   $$\eta(qM\tau) = \eta(M_1(q\tau)) = \varepsilon(M_1) \cdot (-i(c_1q\tau+d))^{\frac{1}{2}} \cdot \eta(q\tau),$$

   wenn wir $\varepsilon(M_1) = \exp\left(\pi i\left(\frac{a+d}{12c_1} + s(-d,c_1)\right)\right)$ setzen. Insgesamt folgt also

   $$\begin{aligned}
   \Phi(M\tau) &= \left(\frac{\varepsilon(M_1)}{\varepsilon(M)}\right)^r \cdot \left(\frac{(-i(c_1q\tau+d))^{\frac{1}{2}}}{(-i(c\tau+d))^{\frac{1}{2}}}\right)^r \cdot \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r \\
   &= \left(\frac{\varepsilon(M_1)}{\varepsilon(M)}\right)^r \cdot \Phi(\tau).
   \end{aligned}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $\varepsilon(M) = \exp\left(\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)\right)$ gesetzt. Wir betrachten also noch

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\varepsilon(M_1)}{\varepsilon(M)}\right)^r &= \left(\frac{\exp\left(\pi i\left(\frac{a+d}{12c_1} + s(-d,c_1)\right)\right)}{\exp\left(\pi i\left(\frac{a+d}{12c_1 q} + s(-d,c_1 q)\right)\right)}\right)^r \\
&= \exp\left(\pi i \cdot r\left(\frac{a+d}{12c_1} - \frac{a+d}{12c_1 q} + s(-d,c_1) - s(-d,c_1 q)\right)\right) \\
&= \exp\left(\pi i \cdot r\left(\left(s(-d,c_1) - \frac{a+d}{12c_1}\right) - \left(s(-d,c_1 q) - \frac{a+d}{12c_1 q}\right)\right)\right) \\
&= \exp(-\pi i r \delta)
\end{aligned}$$

wenn man $\delta = \left(s(-d,c_1 q) - \frac{a+d}{12c_1 q}\right) - \left(s(-d,c_1) - \frac{a+d}{12c_1}\right)$ verwendet. Dann ist $r\delta$ nach dem Satz (3.3) aus dem Vortrag „Die Eta-Funktion“ eine gerade ganze Zahl und wir haben $\Phi(M\tau) = \Phi(\tau)$. □

§2 Fourierkoeffizienten von j

— Die Funktion j_p ausgedrückt als Polynom in Φ —

Für eine Primzahl p und eine unter Γ automorphe Funktion f wurde im Vortrag „Modulformen zu Kongruenzuntergruppen II“ in Satz (2.3) gezeigt, dass die Funktion f_p, definiert durch

$$f_p(\tau) = \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+\lambda}{p}\right),$$

automorph unter $\Gamma_0[p]$ ist und dass die Koeffizienten ihrer Fourierentwicklung die p-ten Koeffizienten derjenigen von f sind.

Um letztendlich die Teilbarkeitseigenschaften der Koeffizienten von $j_p(\tau)$ zu erhalten, stellen wir nun zunächst j_p als Polynom in Φ dar. Sowohl j_p als auch Φ haben einen Pol an der Spitze $\tau = 0$ des Fundamentalbereichs von $\Gamma_0[p]$. Wir verwenden eine Linearkombination von Potenzen von Φ um denselben Hauptteil wie bei j_p zu erhalten.

Zunächst beschaffen wir uns über ein Resultat aus dem Vortrag „Modulformen zu Kongruenzuntergruppen II“ die Ordnung des Pols von $j_p(\tau)$ bei $\tau = 0$. Dort wurde in Satz (3.2) gezeigt, dass

$$j_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) = j_p(\tau) + \frac{1}{p}j(p\tau) - \frac{1}{p}j\left(\frac{\tau}{p}\right)$$

für alle Primzahlen p gilt, da j automorph unter Γ ist.

Da mit τ auch $p\tau$ in $\mathbb{H}$ liegt, erhalten wir den

(2.1) Satz
Sei p eine Primzahl und $\tau \in \mathbb{H}$. Dann gilt

$$j_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = j_p(p\tau) + \frac{1}{p}j(p^2\tau) - \frac{1}{p}j(\tau).$$

Mit $x = e^{2\pi i\tau}$ erhält man die Fourierentwicklung

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = x^{-p^2} - x^{-1} + I_2(x),$$

wobei $I_2(x)$ eine Potenzreihe in x mit ganzzahligen Koeffizienten ist. ◇

Beweis
Wir haben

$$j(\tau) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $x = e^{2\pi i\tau}$ und $c(n) \in \mathbb{Z}$, dann ist j_p, definiert durch

$$j_p(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(np)x^n$$

automorph unter $\Gamma_0[p]$ nach Satz (2.3) aus dem Vortrag „Modulformen zu Kongruenzgruppen II“. Und daher sind auch

$$pj_p(p\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p \cdot c(np) \cdot x^{np} \qquad \text{sowie}$$
$$j(p^2\tau) = \frac{1}{x^{p^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^{np^2}$$

automorph unter $\Gamma_0[p]$, also gilt mit dem Satz (3.2) aus dem Vortrag „Modulformen zu Kongruenzgruppen II“.

$$\begin{aligned} pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) &= pj_p(p\tau) + j(p^2\tau) - j(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p \cdot c(np) \cdot x^{np} + \frac{1}{x^{p^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^{np^2} - \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n \\ &= x^{-p^2} - x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(pc(np)x^{np} + c(n)x^{np^2} - c(n)x^n\right) \\ &= x^{-p^2} - x^{-1} + I(x). \end{aligned}$$

Dabei können die einzelnen Reihen wegen der Konvergenz zusammengefasst werden. □

Nun können wir j_p als Polynom in Φ ausdrücken.

(2.2) Satz
Sei $p \in \{2,3,5,7,13\}$ und sei $\Phi(\tau) = \left(\frac{\eta(p\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r$ mit $r = \frac{24}{p-1}$. Dann gibt es ganze Zahlen $a_1, \dots a_{p^2}$, so dass

$$\begin{aligned} j_p(\tau) &= p^{\frac{r}{2}-1} \cdot \left(a_1\Phi(\tau) + \dots + a_{p^2}\Phi^{p^2}(\tau)\right) + c(0) \\ &= p^{\frac{r}{2}-1} \cdot \sum_{n=1}^{p^2} a_n \Phi^n(\tau) + c(0) \end{aligned}$$

gilt. ◇

Beweis
Aus Satz (2.1) entnehmen wir

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = x^{-p^2} - x^{-1} + I_2(x)$$

und mit $12\alpha = \frac{r}{2}$ liefert uns Satz (1.4)

$$\begin{aligned} p^{\frac{r}{2}}\Phi\left(-\frac{1}{p\tau}\right) &= p^{\frac{r}{2}} \cdot \varphi^{\alpha}\left(-\frac{1}{p\tau}\right) \\ &= p^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{p^{12\alpha}\varphi^{\alpha}(\tau)} = \frac{1}{\Phi(\tau)} \\ &= x^{-1} + I_1(x), \end{aligned}$$

wie unsere Überlegung nach Definition (1.5) zeigt. Sei $\psi(\tau) := p^{\frac{r}{2}}\Phi\left(-\frac{1}{p\tau}\right)$. Dann hat die Differenz

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) - (\psi(\tau))^{p^2} = x^{-p^2} - x^{-1} + I_2(x) - \left(x^{-1} + I_1(x)\right)^{p^2}$$

bei $x = 0$ einen Pol der Ordnung $m_1 \leq p^2 - 1$, und die Laurententwicklung der Differenz um $x = 0$ hat ganzzahlige Koeffizienten.

Somit existiert eine ganze Zahl b_1, so dass die Funktion

$$\tau \mapsto pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) - (\psi(\tau))^{p^2} - b_1\left(\psi(\tau)\right)^{p^2-1}$$

einen Pol der Ordnung $m_2 \leq p^2 - 2$ bei $\tau = \infty$, also bei $x = 0$ hat, und die Laurententwicklung um 0 hat ganzzahlige Koeffizienten.

In p^2 Schritten erhalten wir also eine Funktion

$$f\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) - \sum_{n=0}^{p^2-1} b_n \cdot (\psi(\tau))^{p^2-n},$$

mit $b_0 = 1$, die holomorph in $\tau = \infty$ ist und eine Potenzreihenentwicklung mit ganzzahligen Koeffizienten besitzt.

Weiter sind die b_i ganzzahlig für $1 \leq i \leq p^2 - 1$. Ersetzt man nun τ durch $-\frac{1}{p\tau}$, so erhält man

$$f(\tau) = pj_p(\tau) - \sum_{n=0}^{p^2-1} b_n \cdot \left(\psi\left(-\frac{1}{p\tau}\right)\right)^{p^2-n},$$

mit $b_0 = 1$. Wenn man noch die Definition von ψ einsetzt, erhält man

$$= pj_p(\tau) - \sum_{n=0}^{p^2-1} b_n \cdot \left(p^{\frac{r}{2}} \cdot \Phi(\tau)\right)^{p^2-n},$$

mit $b_0 = 1$. Nun ist f automorph unter $\Gamma_0[p]$, da j_p und Φ automorph sind. Weiter ist f holomorph für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und sogar in $\tau = 0$ (nach Konstruktion). Somit ist f beschränkt in $\mathbb{H}$, also ist f wegen Satz (2.4) aus dem Vortrag „Modulformen zu Kongruenzuntergruppen II" konstant. Wegen $\Phi(\tau) \longrightarrow 0$ für $\tau \to \infty$ und wegen $e^{2\pi i n\tau} \longrightarrow 0$ für $\tau \to \infty$ und $n > 0$, erhalten wir $f(\tau) \longrightarrow p \cdot c(0)$. Damit ist $f(\tau) \equiv p \cdot c(0)$. Wir haben also die gewünschte Darstellung von $j_p(\tau)$ gefunden. □

(2.3) Satz
Die Koeffizienten in der Fourierentwicklung von $j(\tau)$ genügen den folgenden Kongruenzen:

$$c(2n) \equiv 0 \pmod{2^{11}},$$
$$c(3n) \equiv 0 \pmod{3^{5}},$$
$$c(5n) \equiv 0 \pmod{5^{2}},$$
$$c(7n) \equiv 0 \pmod{7}.$$

$\diamond$

Beweis
Der vorhergehende Satz zeigt, dass wir für $p = 2, 3, 5, 7$ und 13

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(np)x^n = p^{\frac{r}{2}-1} \cdot \sum_{n=1}^{p^2} a_n \Phi^n(\tau) + c(0)$$

gilt. Somit gilt auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(np)x^n = p^{\frac{r}{2}-1} \cdot \sum_{n=1}^{p^2} a_n \Phi^n(\tau).$$

Aus Definition (1.5) wissen wir, dass die Funktion Φ und damit auch Φ^n eine Fourier-Entwicklung mit ganzzahligen Koeffizienten hat. Vergleicht man nun beide Seiten der Gleichung, so erhält man folgende Kongruenz:

$$c(pn) \equiv 0 \pmod{p^{\frac{r}{2}-1}},$$

wobei $r = \frac{24}{p-1}$. Wir berechnen also einfach $\frac{r}{2} - 1$ und erhalten die angegebenen Kongruenzen.

Für den Fall $p = 13$ erhält man speziell $r = 2$ und damit $\frac{r}{2} - 1 = 0$ also findet man hier nur die triviale Kongruenz $c(13n) \equiv 0 \pmod{1}$. $\square$

(2.4) Bemerkung
Durch wiederholtes Anwenden der vorangegangenen Ideen, hat Lehner die folgenden, allgemeineren Kongruenzen hergeleitet, die für $\alpha \geq 1$ gültig sind:

$$c(2^{\alpha}n) \equiv 0 \pmod{2^{3\alpha+8}},$$
$$c(3^{\alpha}n) \equiv 0 \pmod{3^{2\alpha+3}},$$
$$c(5^{\alpha}n) \equiv 0 \pmod{5^{\alpha+1}},$$
$$c(7^{\alpha}n) \equiv 0 \pmod{7^{\alpha}}.$$

Da bekannt ist, dass $c(13)$ nicht durch 13 teilbar ist, können Kongruenzen von obiger Form nicht für 13 existieren. 1958 hat Morris Newman Kongruenzen eines anderen Typs für 13 gefunden. Er hat gezeigt, dass

$$c(13np) + c(13n)c(13p) + p^{-1}c(\frac{13n}{p}) \equiv 0 \pmod{13}$$

gilt, wobei $p^{-1}p \equiv 1 \pmod{13}$ und $c(x) = 0$, falls x keine ganze Zahl ist. Die Kongruenzen von Lehner und Newman wurden von Atkin und O'Brien 1967 weiter verallgemeinert. $\diamond$