Elementare Eigenschaften von Hecke-Operatoren

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 28.05.2008

Mareike Ahl

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Definitionen sowie der Analyse elementarer Eigenschaften von Hecke-Operatoren. Auf die algebraische Struktur dieser Operatoren wird in den folgenden Vorträgen eingegangen werden.

§1 Hecke-Operatoren auf dem Vektorraum $V(\mathbb{H})$

In diesem Abschnitt werden die Hecke-Operatoren als Endomorphismen des noch zu definierenden Vektorraums $V(\mathbb{H})$ eingeführt. Auf dieser Grundlage erfolgt auch die Analyse der zugehörigen Fourier-Reihen, die Herleitung einer Ableitungsregel sowie die Betrachtung gewisser Spezialfälle.

(1.1) Definition
Es bezeichne $V(\mathbb{H})$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der Funktionen f mit folgenden Eigenschaften:

(MP.1) Die Funktion f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(MP.2) Die Funktion f ist periodisch mit Periode 1.

(MP.3) Bei ∞ hat f höchstens einen Pol. $\diamond$

Nach Lemma XXIX (1.2) aus dem Skript zur Höheren Funktionentheorie (Krieg, 2007) existiert dann ein $\gamma > 0$ und ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, sodass f durch eine absolut und kompakt-gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\mathrm{Im}(\tau) > \gamma$ dargestellt werden kann.

Eine wichtige Vorarbeit für die Definition der Hecke-Operatoren leistet folgende

(1.2) Definition
Seien a und d positive ganze Zahlen, $f \in V(\mathbb{H})$ und $\tau \in \mathbb{H}$. Dann definiere:

$$(T_{a,d}f)(\tau) := \sum_{b \pmod d} f((a\tau + b)/d).$$

Die Summation erfolgt über ein vollständiges Restesystem (mod d). ◇

Da sich zwei solcher Restesysteme nur durch die Reihenfolge der Elemente beziehungsweise duch ganzzahlige Vielfache von d unterscheiden und da f periodisch mit Periode 1 ist, ist die Summe insbesondere unabhängig von der Wahl des Restesystems: Es gilt

$$f((a\tau + (b + kd))/d) = f((a\tau + b)/d + k) = f((a\tau + b)/d)$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Der Einfachheit halber kann daher über die Zahlen von 0 bis $d - 1$ summiert werden.

Dabei ist $T_{a,d}f$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$, da schon f auf $\mathbb{H}$ meromorph ist. Zudem gilt für alle α, $\beta \in \mathbb{C}$ und für alle $f, g \in V(\mathbb{H})$

$$\begin{aligned}
T_{a,d}(\alpha f + \beta g)(\tau) &= \sum_{b \pmod d} (\alpha f + \beta g)((a\tau + b)/d) \\
&= \sum_{b \pmod d} (\alpha f((a\tau + b)/d) + \beta g((a\tau + b)/d)) \\
&= \sum_{b \pmod d} \alpha f((a\tau + b)/d) + \sum_{b \pmod d)} \beta g((a\tau + b)/d) \\
&= \alpha \sum_{b \pmod d} f((a\tau + b)/d) + \beta \sum_{b \pmod d} g((a\tau + b)/d) \\
&= \alpha T_{a,d}(f)(\tau) + \beta T_{a,d}(g)(\tau).
\end{aligned}$$

Das heißt, $T_{a,d}$ ist linear.

(1.3) Bemerkung
Die im Vortrag „Modulformen zu Kongruenzgruppen II“ für automorphe Funktionen definierte Funktion f_p ist ein Spezialfall von $T_{a,d}f$ und entspricht $\frac{1}{p}T_{1,d}(f)$. ◇

Die bisherigen Informationen führen zu einer ersten

(1.4) Proposition
Für alle $f \in V(\mathbb{H})$ gilt $T_{a,d}f \in V(\mathbb{H})$ und die Fourier-Reihe von $T_{a,d}f$ ist gegeben durch

$$(T_{a,d}f)(\tau) = d \cdot \sum_{m \geq m_0/d} \alpha_f(md) \cdot e^{2\pi i m a \tau},$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Das m_0 ist dabei aus der Fourier-Reihe von f entnommen. $\diamond$

Beweis
Dass $T_{a,d}f$ auf $\mathbb{H}$ meromorph ist, wurde bereits erwähnt.
Sei im Folgenden τ aus $\mathbb{H}$. Mit der Fourier-Reihe von f hat man

$$\begin{aligned}
(T_{a,d}f)(\tau) &= T_{a,d}\left(\tau \mapsto \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}\right)(\tau) \\
&= \sum_{b \pmod d} \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \\
&= \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \sum_{b \pmod d} e^{2\pi i m((a\tau+b)/d)} \\
&= \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m a \tau/d} \sum_{b \pmod d} e^{2\pi i m b/d}.
\end{aligned}$$

Die zweite Summe betrachtet man nun zunächst für den Fall, dass m durch d teilbar ist. Dann hat man

$$\sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i m b/d} = \sum_{b=0}^{d-1} 1 = d.$$

Betrachtet man den Fall, dass m nicht durch d teilbar ist, so erhält man mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
\sum_{b=0}^{d-1} \left(e^{2\pi i m/d}\right)^b &= \frac{(e^{2\pi i m b/d})^d - 1}{e^{2\pi i m b/d} - 1} \\
&= \frac{(e^{2\pi i m b}) - 1}{e^{2\pi i m b/d} - 1} = 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus also für die zweite Summe:

$$\sum_{b=0}^{d-1} (e^{2\pi i m/d})^b = \begin{cases} d & \text{, falls } d|m, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Nun betrachtet man in der Ausgangsformel nur noch diejenigen m, die durch d teilbar sind, ersetzt also m durch md, und erhält

$$(T_{a,d}f)(\tau) = d \cdot \sum_{m \geq m_0/d} \alpha_f(md) \cdot e^{2\pi i m a \tau},$$

was genau die Behauptung für die Fourier-Reihe war.
Da also $T_{a,d}f$ auf diese Art darstellbar ist, bekommt man auch (MP.2) und (MP.3). □

Da nun die Vorarbeit geleistet ist, kann eine Definition der Hecke-Operatoren erfolgen.

(1.5) Definition (Hecke-Operator)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiere $T_n^{(k)}$ durch

$$T_n^{(k)} f := n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n,\ d>0} d^{-k} \cdot T_{a,d} f.$$

◇

Das heißt für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\left(T_n^{(k)} f\right)(\tau) = n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n,\ d>0} d^{-k} \sum_{b \pmod d} f((a\tau + b)/d).$$

Ein sehr einfacher Spezialfall ergibt sich hierbei, wenn man $n = p$, für eine Primzahl p, annimmt. Man erhält dann für alle $\tau \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\left(T_p^{(k)} f\right)(\tau) &= p^{k-1} \sum_{ad=p,\ d>0} d^{-k} \sum_{b \pmod d} f((a\tau + b)/d) \\
&= p^{k-1}\big(p^{-k} \sum_{b \pmod p} f((\tau + b)/p) + 1^{-k} f(p\tau)\big) \\
&= p^{k-1} f(p\tau) + p^{k-1} p^{-k} \sum_{b \pmod p} f((\tau + b)/p) \\
&= p^{k-1} f(p\tau) + p^{-1} \sum_{b \pmod p} f((\tau + b)/p).
\end{aligned}$$

Man kann zudem eine Regel zur Ableitung der Hecke-Operatoren herleiten. Sei dazu $\tau \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\left(T_n^{(k)} f\right)'(\tau) &= n^{k-1} \sum_{ad=n,\ d>0} d^{-k} \sum_{b(mod\ d)} f'((a\tau+b)/d)\ \frac{a}{d} \\ &\overset{a=\frac{n}{d}}{=} n^{k-1} \sum_{ad=n,\ d>0} \frac{n}{d}\ d^{-k-1} \sum_{b(mod\ d)} f'((a\tau+b)/d) \\ &= n^{k} \sum_{ad=n,\ d>0} d^{-(k+2)} \sum_{b(mod\ d)} f'((a\tau+b)/d).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}n\left(T_n^{(k)} f\right)'(\tau) &= n^{k+1} \sum_{ad=n,\ d>0} d^{-(k+2)} \sum_{b(mod\ d)} f'((a\tau+b)/d) \\ &= \left(T_n^{(k+2)} f'\right)(\tau).\end{aligned}$$

Nun kann man folgern, dass, da $T_{a,d}$ linear ist und $T_{a,d} f \in V(\mathbb{H})$ für alle $f \in V(\mathbb{H})$ gilt, alle $T_n^{(k)}$ Endomorphismen des Vektorraums $V(\mathbb{H})$ sind. Zudem lässt sich folgender Schluss ziehen

(1.6) Lemma
Die Fourier-Koeffizienten von $T_n^{(k)} f$ sind gegeben durch

$$\alpha_{T_n^{(k)} f}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \cdot \alpha_f(mn/d^2) \ \text{ mit } \ m \geq \begin{cases} 0 & \text{falls } m_0 = 0, \\ 1 & \text{falls } m_0 > 0, \\ nm_0 & \text{falls } m_0 < 0, \end{cases}$$

und für alle übrigen m gilt $\alpha_{T_n^{(k)} f}(m) = 0$. Die Summation erfolgt über alle positiven Teiler von $(m,n) = \mathrm{ggT}(m,n)$. Insbesondere sind die Fourier-Koeffizienten $\alpha_{T_n^{(k)} f}(0)$ und $\alpha_{T_n^{(k)} f}(1)$ explizit gegeben durch

$$\alpha_{T_n^{(k)} f}(0) = \sigma_{k-1}(n) \cdot \alpha_f(0) \quad \text{und} \quad \alpha_{T_n^{(k)} f}(1) = \alpha_f(n).$$

◇

Beweis
Sei $\tau \in \mathbb{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(T_n^{(k)} f\right)(\tau) &= n^{k-1} \sum_{ad=n} d^{-k} \left(T_{a,d} f\right)(\tau) \\
&= n^{k-1} \sum_{ad=n} d \cdot d^{-k} \sum_{m \geq m_0/d} \alpha_f(md) e^{2\pi i m a \tau} \\
&= n^{k-1} \sum_{ad=n} d^{1-k} \sum_{m \geq m_0/d} \alpha_f(md) e^{2\pi i m a \tau} \\
&= \sum_{ad=n} \frac{n^{k-1}}{d^{k-1}} \sum_{m \geq m_0 a/n} \alpha_f(mn/a) e^{2\pi i m a \tau} \\
&= \sum_{ad=n} a^{k-1} \sum_{m \geq m_0 a/n} \alpha_f(mn/a) e^{2\pi i m a \tau}.
\end{aligned}$$

Da die Summen nun nicht mehr von d abhängen, setzt man der Übersichtlichkeit halber $ma = r$. Man summiert dann also über alle a und r die $a > 0$, sowie $a|n$ und $a|r$ erfüllen. Es gilt $m \geq m_0 a/n$, was äquivalent ist zu $r \geq a^2 m_0/n$. Dann liest sich $\left(T_n^{(k)} f\right)(\tau)$ als

$$\left(T_n^{(k)} f\right)(\tau) = \sum_{r,a} a^{k-1} \cdot \alpha_f\left(nr/a^2\right) \cdot e^{2\pi i r \tau},$$

wobei a die positiven Teiler von (n, r) durchläuft, was die gewünschten Fourier-Koeffizienten liefert. Zudem gilt

$$r \geq \frac{a^2 m_0}{n} \geq \begin{cases} 0 & \text{, falls } m_0 = 0, \\ \frac{m_0}{n} & \text{, falls } m_0 > 0, \\ n m_0 & \text{, falls } m_0 < 0. \end{cases}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus $a \leq n$, da a ein positiver Teiler von n ist, was äquivalent ist zu $a^2 \leq n^2$. Wenn man nun beide Seiten mit $m_0 < 0$ multipliziert, so erhält man $a^2 m_0 \geq n^2 m_0$ und damit $\frac{a^2 m_0}{n} \geq n m_0$.
Für $\alpha_{T_n^{(k)} f}(0)$ und $\alpha_{T_n^{(k)} f}(1)$ gilt dann

$$\alpha_{T_n^{(k)} f}(0) = \sum_{d|(0,n)} d^{k-1} \alpha_f(0n/d^2) = \sum_{d|n} d^{k-1} \alpha_f(0) = \sigma_{k-1}(n) \alpha_f(0),$$

falls $m_0 < 0$ gilt und

$$\alpha_{T_n^{(k)} f}(0) = 0 = \sigma_{k-1}(n) \alpha_f(0)$$

falls $m_0 > 0$ gilt, sowie

$$\alpha_{T_n^{(k)} f}(1) = \sum_{d|(1,n)} d^{k-1} \alpha_f(1n/d^2) = 1^{k-1} \alpha_f(n/1^2) = \alpha_f(n).$$

□

Betrachtet man nun wieder den Fall, dass n eine Primzahl ist, erhält man folgendes

(1.7) Korollar
Sei p eine Primzahl. Dann gilt

$$\alpha_{T_p^{(k)}f}(m) = \begin{cases} \alpha_f(mp), & \text{falls } p \nmid m, \\ \alpha_f(mp) + p^{k-1} \cdot \alpha_f(m/p), & \text{falls } p|m. \end{cases}$$

für alle $m \geq m_0$ ◇

Beweis
Dies ergibt sich schnell, wenn man die beiden Fälle durchrechnet.
1. Fall: $p \nmid m$.
Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{T_p^{(k)}f}(m) &= \sum_{d|(m,p)} d^{k-1}\alpha_f(mp/d^2) \\ &= \sum_{d|1} d^{k-1}\alpha_f(mp/d^2) = \alpha_f(mp). \end{aligned}$$

2. Fall: $p|m$.
Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{T_p^{(k)}f}(m) &= \sum_{d|(m,p)} d^{k-1}\alpha_f(mp/d^2) \\ &= \sum_{d|p} d^{k-1}\alpha_f(mp/d^2) = \alpha_f(mp) + p^{k-1} \cdot \alpha_f(m/p). \end{aligned}$$

□

§2 Transformationen n-ter Ordnung

In diesem Abschnitt wird die Vorarbeit dafür geleistet, die Hecke-Operatoren für Modulformen definieren zu können, da die Definition der Hecke-Operatoren ursprünglich auf den ganzzahligen (2×2)-Matrizen der Determinante n basiert.

(2.1) Definition (Transformationen *n*-ter Ordnung)
Die Transformationen n-ter Ordnung sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Elemente von

$$\Gamma_n := \{M \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}); \det M = n\}$$ ◇

(2.2) Bemerkung
Offensichtlich stimmt Γ_1 mit Γ, der Modulgruppe, überein und es gilt, dass Γ auf Γ_n durch Rechts- und Linksmultiplikation operiert:

$$\Gamma\,\Gamma_n = \Gamma_n = \Gamma_n\,\Gamma$$

(Multiplikationssatz für Determinanten). ◇

(2.3) Definition (Rechtsvertretersystem)
Eine Teilmenge $\mathcal{V} \subset \Gamma_n$ von heißt Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ, wenn gilt

(RV.1) Für jedes M aus Γ_n existiert ein L aus Γ, sodass LM in $\mathcal{V}$ liegt.

(RV.2) Sind M_1, M_2 aus $\mathcal{V}$ mit $M_1 = LM_2$ für ein L aus Γ, dann muss $L = E$ gelten.

(Die Definition eines Linksvertretersystems von Γ_n modulo Γ geschieht analog.) ◇

Diese beiden Aussagen sind äquivalent zu

(RV) Es gilt $\Gamma_n = \bigcup_{M \in \mathcal{V}} \Gamma M$ und die Vereinigung ist disjunkt.

Die Matrizen M_1 und M_2 heißen äquivalent ($M_1 \sim M_2$), wenn ein L in Γ existiert mit $M_1 = LM_2$. Das heißt, dass ein Rechtsvertretersystem modulo Γ nur aus inäquivalenten Matrizen besteht. Zudem ist zu erwähnen, dass Rechtsvertretersysteme nicht eindeutig sind, da sich ihre Elemente durch linksseitige Faktoren aus Γ unterscheiden können. Sollte es auf die Wahl des Vertretersystems nicht ankommen, sei dieses mit $\mathcal{V} = \Gamma : \Gamma_n$ bezeichnet. Es existiert allerdings ein Standardvertretersystem.

(2.4) Satz
Die Menge

$$\left\{M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z});\ ad = n,\ d > 0,\ b\ (mod\ d)\right\}$$

ist ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ. ◇

Beweis
Prüfe Bedingung (RV.1):
Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_n$. Wähle teilerfremde γ, $\delta \in \mathbb{Z}$ mit $\gamma a + \delta c = 0$. Dazu setzt man zuerst $\gamma = c$ und $\delta = -a$ und spaltet gegebenenfalls gemeinsame Teiler ab. Dann existieren, da γ und δ teilerfremd sind, α und β aus $\mathbb{Z}$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Setze nun $L = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $\det L = 1$ und

$$LM = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

Da $\det L = 1$ und $\det(LM) = \det\ L \cdot \det\ M = 1 \cdot n = n$ gilt, folgt $a'd' = n$. Ohne Einschränkung sei im Folgenden $d' > 0$ angenommen (sonst ersetze L durch $-L$).
Da noch nicht sicher ist, dass b' aus einem vollständigen Restesystem (mod d') stammt, betrachtet man zusätzlich

$$T^m LM = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' + md \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Daher kann man b' modulo d' reduzieren, sodass $T^m LM$ in dem Standardvertretersystem enthalten ist.
Prüfe Bedingung (RV.2) :
Seien $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, $M' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)$ in der zu untersuchenden Menge enthalten und sei $L = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{smallmatrix}\right)$ aus Γ mit $M = LM'$. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a' & \alpha b' + \beta d' \\ \gamma a' & \gamma b' + \delta d' \end{pmatrix}.$$

Daraus kann man folgern, dass $\gamma a' = 0$ gilt. Da zusätzlich die Bedinung $d'a' = n$ erfüllt sein muss, folgt $\gamma = 0$.
Da L so gewählt war, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ erfüllt ist, folgt $\alpha\delta = 1$ und, weil nach Voraussetzung $\delta d' = d > 0$ gilt, folgt auch $\alpha = \delta = 1$.
Also gilt $a = a'$, $d = d'$, $b = b' + \beta d$. Da aber b und b' beide aus einem Vertretersystem (mod d) stammen, muss $b = b'$ gelten, also ist $\beta = 0$ und man erhält $L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = E$.□

Nun kann man folgendes Korollar formulieren

(2.5) Korollar
Die Anzahl der Elemente eines jeden Rechtsvertretersystems von Γ_n modulo Γ ist gegeben durch

$$\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d.$$

◇

Beweis
Alle Rechtsvertretersysteme haben gleich viele Elemente, da sich zwei verschiedene Rechtsvertretersysteme nur um jeweils linksseitige Faktoren aus Γ unterscheiden. Berechne also die Anzahl der Elemente des Standardvertretersystems:

$$\sum_{d|n} \left(\sum_{b \pmod d} 1 \right) = \sum_{d|n} d = \sigma_1(n).$$

□

(2.6) Bemerkung

(i) Da Γ von links auf Γ_n operiert, ist der Quotientenraum

$$\Gamma \backslash \Gamma_n := \{\Gamma \cdot M; M \in \Gamma_n\},$$

$\Gamma \cdot M = \{LM; L \in \Gamma\}$, mit der kanonischen Abbildung

$$\pi : \Gamma_n \to \Gamma \backslash \Gamma_n, \quad \pi(M) = \{LM; L \in \Gamma\}$$

definiert. Damit ist $\pi_{|\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \Gamma \backslash \Gamma_n$ ist eine Bijektion.

(ii) Ist $\mathcal{V}$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ, dann sind

$$\mathcal{V}^{\mathrm{t}} = \left\{M^{\mathrm{t}}; M \in \mathcal{V}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}^{\mathrm{ad}} = \left\{M^{\mathrm{ad}}; M \in \mathcal{V}\right\},$$

mit $M^{\mathrm{t}} = M$ transponiert und $M^{\mathrm{ad}} = M$ adjungiert, Linksvertretersysteme von Γ_n modulo Γ und es gilt $|\mathcal{V}| = |\mathcal{V}^{\mathrm{t}}| = |\mathcal{V}^{\mathrm{ad}}|$. ◇

§3 Hecke-Operatoren für Modulformen

In diesem Abschnitt werden die Hecke-Operatoren für Modulformen vom Gewicht k definiert. Dazu muss zuerst gezeigt werden, dass Modulformen vom Gewicht k im Vektorraum $V(\mathbb{H})$ enthalten sind sowie ein Strichoperator für Matrizen aus $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ eingeführt werden. Abschließend wird geschlossen, dass Hecke-Operatoren Spitzenformen wieder auf Spitzenformen abbilden.

(3.1) Definition
Für $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ mit $\det M > 0$ und für Funktionen f, die auf $\mathbb{H}$ meromorph sind, definiert durch

$$(f|M)(\tau) = (f|_k M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f(M\tau)$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$. $\diamond$

Es gilt wieder

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)|M(\tau) &= (c\tau + d)^{-k}(\alpha f + \beta g)(M\tau)\\ &= (c\tau + d)^{-k}(\alpha f(M\tau) + \beta g(M\tau))\\ &= (\alpha f|M)(\tau) + (\beta g|M)(\tau)\end{aligned}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sowie für alle $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ und $N = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$,mit $N, M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ mit $\det M > 0$ und $\det N > 0$

$$\begin{aligned}(f|N)|M(\tau) &= (\gamma\tau + \delta)^{-k}(f|N)(M\tau)\\ &= (\gamma\tau + \delta)^{-k}(cM\tau + d)^{-k} f(NM\tau)\\ &= (\gamma\tau + \delta)^{-k}\left(c\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} + d\right)^{-k} f(NM\tau)\\ &= ((c\alpha + d\gamma)\tau + (c\beta + d\delta))^{-k} f(NM\tau) \quad = f|NM(\tau)\end{aligned}$$

.

Da Modulformen vom Gewicht k meromorph auf $\mathbb{H}$ und periodisch mit Periode 1 sind und bei ∞ höchstens einen Pol haben, sind alle Modulformen vom Gewicht k auch in $V(\mathbb{H})$ enthalten. Es gilt also $\mathbb{V}_k \subset V(\mathbb{H})$. Man kann also $T_{a,d}$ auch auf Funktionen aus $\mathbb{V}_k$ anwenden.

Eine explizite Beschreibung der Hecke-Operatoren für Modulformen erfolgt dann folgendermaßen:

(3.2) Satz
Ist $\Gamma : \Gamma_n$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ und $f \in \mathbb{V}_k$, dann gilt

$$T_n f := T_n^{(k)} f = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma:\Gamma_n} f|_k M$$

und $T_n f$ ist wieder ein Element von $\mathbb{V}_k$. ◇

Beweis
Bezeichne $n^{k-1} \sum_{M\in\Gamma:\Gamma_n} f|_k M$ mit f^*. Die Elemente zweier Rechtsvertretersysteme von Γ_n modulo Γ unterscheiden sich bis auf Reihenfolge jeweils nur um linksseitige Faktoren aus Γ und es gilt, da f ein Element aus $\mathbb{V}_k$ ist, dass $f|L = f$ für beliebige $L \in \Gamma$ erfüllt sein muss. Das bedeutet, dass f^* nicht abhängig von der Wahl des Vertretersystems ist. Daher ist f^* wohldefiniert und man kann für diesen Beweis das Standardvertretersystem verwenden. Es ergibt sich dabei

$$\begin{aligned} f^*(\tau) &= n^{k-1} \sum_{M\in\Gamma:\Gamma_n} d^{-k} f((a\tau+b)/d) \\ &= n^{k-1} \sum_{ad=n} d^{-k} \sum_{b \pmod d} f((a\tau+b)/d) = \left(T_n^{(k)} f\right)(\tau). \end{aligned}$$

Also gilt $T_n f \in V(\mathbb{H})$.
Sei nun $\Gamma : \Gamma_n$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ und $N \in \Gamma$ fest gewählt. Dann ist auch $\{MN; M \in \Gamma : \Gamma_n\} =: \mathcal{V}$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ. Die Bedinung (RV1) ist erfüllt, da für $A \in \Gamma_n$ auch $AN^{-1} \in \Gamma_n$ ist, somit also ein $L \in \Gamma$ existiert, sodass $LAN^{-1} \in \Gamma : \Gamma_n$ erfüllt ist. Dann gilt auch $LA \in \mathcal{V}$.
Die Bedingung (RV2) ist erfüllt, da zwei Elemente M_1 und M_2 aus $\mathcal{V}$ auch geschrieben werden können als $M_1 = MN$ und $M_2 = M'N$ mit M und M' aus $\Gamma : \Gamma_n$, sodass sich $M_1 = LM_2$ für ein L aus Γ darstellen lässt als $MN = LM'N$ was äquivalent ist zu $M = LM'$, woraus $L = E$ folgt.
Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} T_n f = n^{k-1} \sum_{M\in\Gamma:\Gamma_n} f|_k(MN) &= n^{k-1} \sum_{M\in\Gamma:\Gamma_n} (f|_k M)|_k N \\ &\overset{f\in\mathbb{V}_k}{=} (T_n f)\,|_k N, \end{aligned}$$

also ist $T_n f$ modular vom Gewicht k. □

Mit (1.6) erhält man folgendes

(3.3) Lemma
Alle Hecke-Operatoren $T_n^{(k)} : \mathbb{M}_k \to \mathbb{M}_k$ $n \geq 1$ sind Endomorphismen, die Spitzenformen auf Spitzenformen abbilden. $\diamond$

Beweis
Durch $T_n^{(k)}$ wird eine ganze Modulform f vom Gewicht k wieder auf eine ganze Modulform vom Gewicht k abgebildet, da für $m_0 = 0$ in der Fourier-Reihe von f auch $m \geq 0$ in der Fourier-Reihe von $T_n^{(k)} f$ gilt.
Zu zeigen ist also nur noch, dass $\alpha_{T_n f}(0) = 0$ gilt, wenn schon $\alpha_f(0) = 0$ erfüllt ist. Da man aus Lemma (1.6) weiß, dass sich $\alpha_{T_n^{(k)} f}(0)$ als $\alpha_{T_n^{(k)} f}(0) = \sigma_{k-1}(n) \cdot \alpha_f(0)$ berechnen lässt, folgt die Behauptung sofort. $\square$