Die algebraische Struktur der Hecke-Operatoren II

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 18.06.2008

Till Dieckmann

§1 Ganzheitsbasen

(1.1) Definition (Ganze Modulformen mit ganzen Fourier-Koeffizienten)
Für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} := \{f \in \mathbb{M}_k;\, \alpha_f(m) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } m \in \mathbb{Z}\}$$

sowie

$$\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}} := \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{S}_k.$$

Hierbei sei wie gewohnt $\mathbb{M}_k$ beziehungsweise $\mathbb{S}_k$ der Raum der ganzen Modulformen beziehungsweise der Spitzenformen vom Gewicht k. Für $m \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\alpha_f(m)$ den m-ten Fourier-Koeffizienten von f. $\diamond$

(1.2) Bemerkungen

a) Die Mengen $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ und $\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$ bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition eine abelsche Gruppe, also einen Modul über $\mathbb{Z}$. Später werden wir sehen, dass $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ sogar frei ist und eine $\mathbb{Z}$-Basis besitzt, welche auch gleichzeitig eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{M}_k$ ist. Indem man die Fourier-Entwicklungen formal ausmultipliziert, erhält man noch

$$\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \cdot \mathbb{M}_l^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{M}_{k+l}^{\mathbb{Z}} \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N}_0.$$

b) Für die normierten Eisenstein-Reihen G_4^* und G_6^* gelten gemäß [K] III. 2.1 (10),(11) die Fourier-Entwicklungen

$$G_4^*(\tau) = 1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau} \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}$$

sowie

$$G_6^*(\tau) = 1 - 504 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) e^{2\pi i m \tau} \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H},$$

wobei $\sigma_k(m) := \sum_{d|m} d^k$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gehört G_4^* zu $\mathbb{M}_4^{\mathbb{Z}}$ und G_6^* zu $\mathbb{M}_6^{\mathbb{Z}}$.

c) Nach [K] III. 2.2 (4) besitzt die normierte Diskriminante Δ^* die Fourier-Entwicklung

$$\Delta^*(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{2\pi i m \tau} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H},$$

mit $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\tau(1) = 1$. Da Δ^* zu $\mathbb{S}_{12}$ gehört, schließt man auch $\Delta^* \in \mathbb{S}_{12}^{\mathbb{Z}}$. ◇

Wir berechnen die ersten Räume.

(1.3) Lemma

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0^{\mathbb{Z}} &= \mathbb{Z}, \\ \mathbb{M}_2^{\mathbb{Z}} &= \{0\}, \\ \mathbb{M}_4^{\mathbb{Z}} &= \mathbb{Z} G_4^*, \\ \mathbb{M}_6^{\mathbb{Z}} &= \mathbb{Z} G_6^*, \\ \mathbb{M}_8^{\mathbb{Z}} &= \mathbb{Z} G_4^{*2}, \\ \mathbb{M}_{10}^{\mathbb{Z}} &= \mathbb{Z} G_4^* G_6^*. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} g \oplus \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}} \Delta^*$$

für alle $k \geq 12$ und beliebiges normiertes $g \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$. ◇

Beweis

a) Nach [K] Proposition III. 4.1 hat man $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}$ sowie $\mathbb{M}_2 = \{0\}$ und somit natürlich auch $\mathbb{M}_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{M}_2^{\mathbb{Z}} = \{0\}$. Sei nun $k \in \{4, 6, 8, 10\}$ und bezeichne g_k das entsprechende Produkt von Eisenstein-Reihen aus der Aussage in a). Nach (1.2) ist g_k in $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ enthalten. Sei nun umgekehrt $f \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$. Da für diese Wahl von k der Raum $\mathbb{M}_k$ eindimensional ist, hat man somit $f = c g_k$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Wegen $c = c\alpha_{g_k}(0) = \alpha_f(0) \in \mathbb{Z}$ folgt also auch $c \in \mathbb{Z}$.

b) Sei nun $k \geq 12$ und $g \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ normiert. Die rechte Seite der Gleichung aus b) ist dann in $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ enthalten. Ist nun $f \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$, so hat man wegen $\alpha_g(0) = 1$ sicherlich $f - \alpha_f(0) g \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{S}_k = \mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$. Nach [K] Satz III. 4.1 gilt $\Delta^*(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ sowie $\Delta^* \in \mathbb{S}_{12}^{\mathbb{Z}}$ gemäß (1.2) c). Somit ist $(\Delta^*)^{-1}$ holomorph auf $\mathbb{H}$, modular vom Gewicht -12. Wendet man [K] Proposition I. 4.4 auf $\tau \mapsto e^{-2\pi i \tau} \Delta^*$ an, so folgt, dass $(\Delta^*)^{-1}$ ebenso eine Fourier-Entwicklung mit ganzzahligen Koeffizienten besitzt. Wegen $(\Delta^*)^{-1}\left(f-\alpha_f(0)g\right) \in \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}$ erhält man schließlich

$$f = \Delta^* \left((\Delta^*)^{-1}\left(f-\alpha_f(0)g\right)\right) + \alpha_f(0)g \in \mathbb{Z}g \oplus \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}\Delta^*.$$ □

Wir kommen nun zum angekündigten Ergebnis:

(1.4) Satz
Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ ist frei vom Rang $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k$. Man erhält $\mathbb{Z}$-Basen rekursiv in der Form

$$\left\{g_v(\Delta^*)^v;\ 0 \le v \le \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor\right\}\text{ , falls } k \not\equiv_{12} 2,$$

$$\left\{g_v(\Delta^*)^v;\ 0 \le v < \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor\right\}\text{ , falls } k \equiv_{12} 2,$$

für normierte $g_v \in \mathbb{M}_{k-12v}^{\mathbb{Z}}$. Die $\mathbb{Z}$-Basen sind zugleich $\mathbb{C}$-Basen von $\mathbb{M}_k$. ◇

Beweis
Nach (1.3) a) hat man $\mathbb{M}_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, also ist $\mathbb{M}_0^{\mathbb{Z}}$ frei vom Rang $1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_0$. Ebenso liefert $\mathbb{M}_2^{\mathbb{Z}} = \{0\}$, dass $\mathbb{M}_2^{\mathbb{Z}}$ frei vom Rang $0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_2$ ist. Für $k \in \{4,6,8,10\}$ hat man nach der Dimensionsformel aus [K] III. 4.1 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k = 1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor = 1$, sowie nach (1.3) a) auch $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}g_k$. Man schließt, dass $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ frei vom Rang $1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k$ ist. Gemäß (1.3) b) gilt $\mathbb{M}_{12}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}g \oplus \mathbb{Z}\Delta^*$ für beliebiges normiertes $g \in \mathbb{M}_{12}^{\mathbb{Z}}$. Somit ist $\mathbb{M}_{12}^{\mathbb{Z}}$ frei vom Rang $2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_{12}$. Wir führen eine Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ für k gerade. Sei die Behauptung also für festes $k \ge 12$ bereits wahr. Ist $k+2 \not\equiv_{12} 2$, so auch $k-10 \not\equiv_{12} 2$. Nach (1.3) hat man $\mathbb{M}_{k+2}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}g \oplus \mathbb{M}_{k-10}^{\mathbb{Z}}\Delta^*$ für beliebige normierte $g \in \mathbb{M}_{k+2}^{\mathbb{Z}}$. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{M}_{k-10}^{\mathbb{Z}}$ frei vom Rang $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_{k-10}$, mit einer $\mathbb{Z}$-Basis der Form

$$\left\{g_v\Delta^{*v},\ 0 \le v \le \left\lfloor \frac{k-10}{12} \right\rfloor\right\}$$

für normierte $g_v \in \mathbb{M}_{k-10-12v}$, welche auch eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{M}_{k-10}$ ist. Somit ist die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{g, g_v(\Delta^*)^{v+1};\ 0 \le v \le \left\lfloor \frac{k-10}{12} \right\rfloor\right\} = \left\{g, g_{v-1}(\Delta^*)^v, 1 \le v \le \left\lfloor \frac{k+2}{12} \right\rfloor\right\}$$ □

eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{M}_{k+2}^{\mathbb{Z}}$. Nach [K] III. 4.2 (1) hat man $\mathbb{M}_{k+2} = \mathbb{C}G_k^* \oplus \mathbb{M}_{k-10}\Delta^*$, und deshalb bildet $\mathcal{B}$ auch eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{M}_{k+2}$. Den Fall $k+2 \equiv_{12} 2$ behandelt man analog.

(1.5) Bemerkung
Eine Basis wie in (1.4) nennt man auch *Ganzheitsbasis* von $\mathbb{M}_k$. $\diamond$

(1.6) Korollar
a) $\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$ ist einer freier $\mathbb{Z}$-Modul.
b) Es gilt $\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}} = \Delta^* \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}$ für alle $k \geq 12$.
c) Man hat $\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}} = \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}$.

Beweis
a) Als Untermodul des freien Moduls $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ ist auch $\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$ frei.
b) Offenbar ist die rechte Seite in $\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$ enthalten. Hat man nun $f \in \mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$, so ist $f(\Delta^*)^{-1} \in \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}$, denn $(\Delta^*)^{-1}$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$ und besitzt eine Fourier-Entwicklung über $\mathbb{Z}$. Man vergleiche hierzu auch den Beweis von (1.3) b). Somit folgt
$$f = \Delta^*(\Delta^*)^{-1} f \in \Delta^* \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}.$$
c) Das folgt direkt mit b). $\square$

(1.7) Bemerkung
Sei $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{M}_{k-12}$ für $k \geq 12$. Nach (1.6) b) ist dann $\Delta^* \cdot \mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{S}_k$. $\diamond$

§2 Ganzzahlige Darstellungen

Für $k > 0$ gerade bezeichne $T_n := T_n^{(k)}$ den n-ten Hecke-Operator zum Gewicht k.

(2.1) Lemma
Die Moduln $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ und $\mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$ sind T_n-invariant. Es gilt also
$$T_n \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \text{ und } T_n \mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{S}_k^{\mathbb{Z}}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Beweis
Für $f \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ sei $g := T_n f$. Nach [K] Lemma IV. 1.1 hat man
$$\alpha_g(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \alpha_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \in \mathbb{Z} \ \text{ für alle } \ m \in \mathbb{N}_0.$$
Da T_n Spitzenformen auf Spitzenformen abbildet, folgt die Behauptung. $\square$

Für eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{S}_k$ hat man bekanntlich einen $\mathbb{C}$-Algebren-Isomorphismus

$$\phi : \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_k \to \mathbb{C}^{t\times t}, \qquad \varrho \mapsto M_{\mathcal{B}}(\varrho).$$

mit $t = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_k$. Hierbei bezeichnet $M_{\mathcal{B}}(\varrho)$ die Darstellungsmatrix von ϱ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Wir wollen die Bilder von T_n unter ϕ bestimmen, und erhalten folgenden

(2.2) Satz
Sei $t = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_k$ und $\mathcal{B} = \{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{S}_k$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $A(n) := \phi(T_n)$. Dann gilt:

a) $A(n) \in \mathbb{Z}^{t\times t}$,

b) $A(n)A(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} A(\frac{mn}{d^2})$,

c) $\mathcal{H}_k^{\mathbb{Z}} := \phi(\mathcal{H}_k) = \langle A(n);\ n \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{Z}} = \langle A(p);\ p \in \mathbb{P}\rangle_{\mathbb{Z}}$ als unitäre $\mathbb{Z}$-Algebra. $\diamond$

Beweis

a) Sei $\nu \in \{1, \ldots, t\}$. Nach (2.1) ist $T_n g_\nu \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$, das heißt, es existieren eindeutig bestimmte $a_{\mu\nu}(n) \in \mathbb{Z}$ für $1 \le \mu, \nu \le t$ mit $T_n g_\nu = \sum_{\mu=1}^{t} a_{\mu\nu}(n) g_\mu$, da $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ ist. Somit ist $A(n) = \phi(T_n) = (a_{\mu\nu}(n))_{1\le\mu,\nu\le t} \in \mathbb{Z}^{t\times t}$.

b) Da ϕ ein Homomorphismus zwischen Algebren ist, folgt die Behauptung aus [K] Satz IV. 2.3 (2).

c) Da Isomorphismen insbesondere Erzeugendensysteme auf Erzeugendensysteme abbilden, folgt die Behauptung wieder aus [K] Satz IV. 2.3. $\square$

Aus (2.2) können wir nun Schlüsse für die Eigenwerte der Hecke-Operatoren T_n ziehen:

(2.3) Korollar
Die Eigenwerte der Hecke-Operatoren T_n auf $\mathbb{M}_k$ sind ganz-algebraische Zahlen vom Grad kleiner gleich t. $\diamond$

Beweis
Wegen $\mathbb{M}_2 = \{0\}$ ist die Behauptung in diesem Fall bereits klar. Sei also $k \ge 4$ gerade. Nach linearer Algebra sind die Eigenwerte von T_n auf $\mathbb{S}_k$ gerade die Eigenwerte der korrespondierenden Darstellungsmatrix $A(n)$ aus (2.2). Diese sind aber gerade die Nullstellen des normierten Polynoms $\chi_{A(n)}(X) = \det(XE - A(n)) \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad t. Sei nun $f \in \mathbb{M}_k$ mit $\alpha_f(0) \neq 0$ eine Eigenfunktion von T_n zum Eigenwert λ.

Wegen $T_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_k}$ ist 1 der einzige Eigenwert von T_1. Ist $n > 1$, so existiert nach [K] Satz IV. 2.4 ein $c \in \mathbb{C}^*$ mit $f = c \cdot G_k^*$. Man erhält $\lambda = \sigma_{k-1}(n) \in \mathbb{Z}$ aus [K] Korollar IV. 2.4. □

(2.4) Korollar
Sei $f \in \mathbb{M}_k$ eine simultane Eigenform mit $\alpha_f(1) = 1$. Dann sind die Fourier-Koeffizienten $\alpha_f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ganz-algebraische Zahlen vom Grad kleiner gleich t.

Beweis
Wegen $\alpha_f(1) = 1$ hat man nach [K] Lemma IV. 1.4 $\lambda_f(n) = \alpha_f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Behauptung aus (2.3). □

§ 3 Anwendungen: $\mathbb{S}_{24}$

Im Folgenden betrachten wir die Hecke-Operatoren T_n als Elemente von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{S}_{24}$ und untersuchen die Eigenschaften der entsprechenden Darstellungsmatrizen $A(p)$ aus (2.2) für $p \in \mathbb{P}$.

Aus der Dimensionsformel [K] III. 4.1 schließt man $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_{24} = 2$. Nach Satz (1.4) ist $\mathcal{B} = \{(G_6^*)^2\Delta^*, (\Delta^*)^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{S}_{24}$. Es sei $g_1 := (G_6^*)^2\Delta^*$, $g_2 := (\Delta^*)^2$ und $\alpha_j(m) := \alpha_{g_j}(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2$. Setzt man $q = e^{2\pi i\tau}$ für $\tau \in \mathbb{H}$, so erhält man nach [K] IV. 2.6 die Fourier-Entwicklungen

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= q - 2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot q^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 139 \cdot q^3 + 2^6 \cdot 31 \cdot 5527 \cdot q^4 + \ldots, \\ g_2(\tau) &= q^2 - 2^4 \cdot 3 \cdot q^3 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot q^4 + \ldots. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Wirkung von T_p auf $\mathcal{B}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und erhalten folgendes

(3.1) Lemma
Es ist

$$A(2) = -2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot E + A \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 & 2^3 \cdot 3 \cdot 131 \end{pmatrix},$$

sowie

$$A(p) = \alpha_1(p)E + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2(p) \\ \xi(p) & \eta(p) - \alpha_1(p) \end{pmatrix}$$

für $p \geq 3$. Hierbei ist

$$\xi(p) := \alpha_1(2p) \cdot +2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot \alpha_1(p),$$

$$\eta(p) := \alpha_2(2p) + 2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot \alpha_2(p).$$

◇

Beweis
Sei $h_1 = T_2 g_1$. Nach [K] Lemma IV. 1.1 gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ die allgemeine Formel

$$\alpha_{T_p f}(m) = \begin{cases} \alpha_f(pm) + p^{23} \cdot \alpha_f(\frac{m}{p}), & \text{falls } p \mid m, \\ \alpha_f(pm), & \text{falls } p \nmid m. \end{cases}$$

Somit hat man

$$\alpha_{h_1}(1) = \alpha_1(2) = -2^3 \cdot 3 \cdot 43,$$
$$\alpha_{h_1}(2) = \alpha_1(4) + 2^{23} \cdot \alpha_1(1) = 2^6 \cdot 31 \cdot 5527 + 2^{23}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 g_1(\tau) + 2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot g_1(\tau) &= (2^6 \cdot 31 \cdot 5527 + 2^{23} - 2^6 \cdot 3^2 \cdot 43^2) q^2 + \ldots \\ &= 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot q^2 + \ldots . \end{aligned}$$

Somit hat man eine Fourier-Entwicklung der Form

$$h(\tau) := T_2 g_1(\tau) + 2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot g_1(\tau) - 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot g_2(\tau) = c \cdot q^3 + \ldots .$$

Das bedeutet $\operatorname{ord}_\infty h \geq 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_{24}$ und somit $h = 0$ nach [K] Korollar C III. 4.1. Es ergibt sich also

$$T_2 g_1(\tau) = -2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot g_1(\tau) + 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot g_2(\tau).$$

Sei nun $h_2 := T_2 g_2$. Dann gilt

$$\alpha_{h_2}(1) = \alpha_2(2) = 1,$$
$$\alpha_{h_2}(2) = \alpha_2(4) + 2^{23} \cdot \alpha_2(1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5,$$

da g_2 eine Spitzenform ist. Man hat also die Entwicklung

$$h_2(\tau) - g_1(\tau) = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^3 \cdot 3 \cdot 43) \cdot q^2 + \cdots = 2^6 \cdot 3 \cdot 11 \cdot q^2 + \ldots$$

Analog zu oben gilt also $T_2 g_2 = g_1 + 2^6 \cdot 3 \cdot 11 \cdot g_2$, und man erhält

$$\begin{aligned} A(2) &= \begin{pmatrix} -2^3 \cdot 3 \cdot 43 & 1 \\ 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 & 2^6 \cdot 3 \cdot 11 \end{pmatrix} \\ &= -2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 & 2^3 \cdot 3 \cdot 131 \end{pmatrix} \\ &= -2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot E + A. \end{aligned}$$

Um $A(p)$ für $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ zu bestimmen, setzen wir $\xi(p) := \alpha_1(2p) + 2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot \alpha_1(p)$ und $\eta(p) := \alpha_2(2p) + 2^3 \cdot 3 \cdot 43 \cdot \alpha_2(p)$. Mit $h_1 := T_p g_1$ erhält man $\alpha_{h_1}(1) = \alpha_1(p)$ und $\alpha_{h_2} = \alpha_1(2p)$, also

$$h_1(\tau) - \alpha_1(p) g_1(\tau) = (\alpha_1(2p) + \alpha_1(p) \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 43) \cdot q^2,$$

analog wie für $A(2)$ auch

$$T_p g_1 = \alpha_1(p) g_1 + (\alpha_1(2p) + \alpha_1(p) \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 43) g_2,$$

und

$$T_p g_2 = \alpha_2(p) g_1 + (\alpha_2(2p) + \alpha_2(p) \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 43) g_2.$$

Es folgt

$$A(p) = \begin{pmatrix} \alpha_1(p) & \alpha_2(p) \\ \xi(p) & \eta(p) \end{pmatrix} = \alpha_1(p) E + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2(p) \\ \xi(p) & \eta(p) - \alpha_1(p) \end{pmatrix}.$$

□

Wir kommen nun zum Hauptresultat.

(3.2) Satz

Für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ gilt $A(p) = \alpha_1(p) E + \alpha_2(p) A$ mit A wie in (3.1). ◇

Beweis

Nach (2.2) a) kommutieren $A(2)$ und $A(p)$ für $p \geq 3$, inbesondere vertauschen somit A und

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2(p) \\ \xi(p) & \eta(p) - \alpha_1(p) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 & 2^3 \cdot 3 \cdot 131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2(p) \\ \xi(p) & \eta(p) - \alpha_1(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(p) & \eta(p) - \alpha_1(p) \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2(p) \\ \xi(p) & \eta(p) - \alpha_1(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 & 2^3 \cdot 3 \cdot 131 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot \alpha_2(p) & 2^3 \cdot 3 \cdot 131 \cdot \alpha_2(p) \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt schließlich $\xi(p) = 2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot \alpha_2(p)$ und $\eta(p) = \alpha_1(p) + 2^3 \cdot 3 \cdot 131 \cdot \alpha_2(p)$. Setzt man die Werte für $\xi(p)$ und $\eta(p)$ ein, so ergibt sich die Behauptung. □

(3.3) Korollar
Die Eigenwerte der Hecke-Operatoren T_p auf $\mathbb{S}_{24}$ liegen im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{144169})$. ◇

Beweis
Ist $\alpha_2(p) = 0$ hat man $A(p) = \alpha_1(p)E$. Somit liegen trivialerweise alle Eigenwerte von T_p in $\mathbb{Q}$. Ist $\alpha_2(p) \neq 0$ und λ ein Eigenwert von $A(p)$, dann ist $\frac{1}{\alpha_2(p)}(\lambda - \alpha_1(p))$ ein Eigenwert von A. Das charakteristische Polynom χ_A berechnet sich zu

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Spur} AX + \det A,$$

dessen Diskriminante

$$\operatorname{Disc}(\chi_A) = (\operatorname{Spur} A)^2 - 4 \det A = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 144169$$

□

ist. Folglich liegt λ im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \mathbb{Q}(\sqrt{144169})$.

§4 Das Petersson-Skalarprodukt

Wir beginnen mit der fundamentalen Definition.

(4.1) Definition (Hyperbolisches Maß auf $\mathbb{H}$)
Es bezeichne $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{H}$, wobei wir $\mathbb{C}$ via

$$x + iy \mapsto (x, y)^{tr}$$

mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Wir definieren das *hyberbolische Maß* ν auf $\mathbb{H}$ durch

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{H}) &\to \overline{\mathbb{R}}_+, \\ \Omega &\mapsto \int_\Omega y^{-2}\, d\lambda(\tau). \end{aligned}$$

Für $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ nennt man $\nu(\Omega)$ auch die $\mathbb{H}$-Fläche von Ω. ◇

Das Maß ν auf $\mathbb{H}$ ist gerade das in [K] [Siegelsche Modulformen] I. 3.18 eingeführte symplektische Maß μ_1.

Wir erklären zunächst die Integration komplexwertiger Funktionen auf $\mathbb{H}$, wobei der Begriff „mesbar" für „Lebesgue-messbar" stehe.

(4.2) Definition (Messbarkeit komplexwertiger Funktionen)
Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heisst messbar, wenn die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind. ◇

(4.3) Definition (Integrierbarkeit komplexwertiger Funktionen)
Eine messbare Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_{\mathbb{H}} f \, d\lambda := \int_{\mathbb{H}} \operatorname{Re} f \, d\lambda + i \int_{\mathbb{H}} \operatorname{Im} f \, d\lambda.$$

Wir wollen nun Funktionen auf $\mathbb{H}$ bezüglich des hyperbolischen Maßes ν integrieren.

(4.4) Definition (Integrierbarkeit bezüglich ν)
Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *hyperbolisch integrierbar* oder kurz ν-integrierbar, wenn die Funktion

$$\mathbb{H} \to \mathbb{C},$$
$$\tau \mapsto y^{-2} f(\tau)$$

im Sinne von Definition 4.3 integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_{\mathbb{H}} f \, d\nu := \int_{\mathbb{H}} y^{-2} f(\tau) \, d\lambda(\tau).$$

Für $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ nennt man $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ hyperbolisch integrierbar über Ω, wenn $f \cdot \chi_\Omega$ hyperbolisch integrierbar ist. Wie üblich setzt man in diesem Fall

$$\int_{\Omega} f \, d\nu := \int_{\mathbb{H}} f \cdot \chi_\Omega \, d\nu.$$

◇

Die Gruppe $GL_2^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : \ \det A > 0\}$ operiert bekanntlich auf $\mathbb{H}$ via

$$(M, \tau) \mapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden notieren wir eine Invarianzeigenschaft von hyperbolischen Integralen unter diesen Transformationen.

(4.5) Lemma
Sei $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ messbar, und $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$. Für $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$ hat man dann

$$\int\limits_{M\Omega} \varphi \; d\nu = \int\limits_{\Omega} \varphi(M\tau) \; d\nu(\tau),$$

falls eines der Integrale existiert. $\diamond$

Beweis
Sei $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$. Die Möbius-Transformation $\Phi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \; \tau \mapsto M\tau$ ist bijektiv und stetig differenzierbar, mit ebenso stetig differenzierbarer Umkehrfunktion $\Phi_{M^{-1}}$. Somit ist Φ_M ein Diffeomorphismus, und folglich auch $M\Omega$ messbar. Die Funktion

$$\mathbb{H} \to \mathbb{R}_+^*, \quad \tau \mapsto y^{-2}$$

ist als stetige Funktion messbar. Nach [K] II. 2.1 (7), 2.3 (1) hat man die Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Phi_M(\tau) &= \frac{\det M}{(c\tau + d)^2}, \\ \operatorname{Im} M\tau &= \frac{\det M}{|c\tau + d|^2} \operatorname{Im} \tau. \end{aligned}$$

Betrachtet man Φ_M als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so ist der Betrag der Funktionaldeterminante nach [K] [Analysis IV] XVI. 3.6 gegeben durch

$$|\det D\Phi_M| = \left| \frac{d}{d\tau}\Phi_M(\tau) \right|^2.$$

Wendet man schliesslich die Transformationsformel [K] [Analysis III] XIV. 5.7 an, so ergibt sich folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}\int\limits_{M\Omega} \varphi\, d\nu &= \int\limits_{M\Omega} \varphi(\tau) y^{-2}\, d\lambda(\tau)\\ &= \int\limits_{\Omega} \varphi(M\tau)\,\mathrm{Im}(M\tau)^{-2} |\det D\Phi_M(\tau)|\, d\lambda(\tau)\\ &= \int\limits_{\Omega} \varphi(M\tau)\,\mathrm{Im}(M\tau)^{-2} \left|\frac{d}{d\tau}\Phi_M(\tau)\right|^2 d\lambda(\tau)\\ &= \int\limits_{\Omega} \varphi(M\tau)(\det M)^{-2}\,\mathrm{Im}(\tau)^{-2}|c\tau+d|^4(\det M)^2 \frac{1}{|c\tau+d|^4}\, d\lambda(\tau)\\ &= \int\limits_{\Omega} \varphi(M\tau) y^{-2}\, d\lambda(\tau)\\ &= \int\limits_{\Omega} \varphi(M\tau)\, d\nu(\tau).\end{aligned}$$

□

Für $\varphi \equiv 1$ erhält man noch die Invarianz des hyperbolischen Maßes unter Möbius-Transformationen.

(4.6) Korollar
Für alle $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ und $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$ gilt $\nu(M\Omega) = \nu(\Omega)$.

Wir wollen konkrete Werte für $\mathbb{H}$-Flächen berechnen. ◇

(4.7) Lemma
Der Fundamentalbereich $\mathbb{F}$ der Modulgruppe hat endliche $\mathbb{H}$-Fläche mit $\nu(\mathbb{F}) = \frac{\pi}{3}$.◇

Beweis
Der Rand $\partial\mathbb{F}$ von $\mathbb{F}$ ist bereits eine Lebesgue-Nullmenge, daher ist auch $\nu(\partial\mathbb{F}) = 0$. Es genügt somit $\nu(\overline{\mathbb{F}})$ zu berechnen. $\overline{\mathbb{F}}$ ist als abgeschlossene Menge sicher messbar. Man hat zunächst

$$\overline{\mathbb{F}} = \left\{\tau \in \mathbb{H} :\ \mathrm{Re}\,\tau \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \mathrm{Im}(\tau) \geq \sqrt{1-(\mathrm{Re}\,\tau)^2}\right\}.$$

Mit $\tau = x + iy$ erhält man aus dem Satz von Fubini [K] [Analysis III] XIV. 4.9

$$\begin{aligned}
\nu(\overline{\mathbb{F}}) &= \int\limits_{\overline{\mathbb{F}}} y^{-2}\, d\lambda(\tau) \\
&= \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \left(\int\limits_{[\sqrt{1-x^2},\infty)} y^{-2}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty} d\lambda(x) \\
&= \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\lambda(x) \\
&= [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

□

(4.8) Korollar
Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ messbar und auf $\mathbb{F}$ beschränkt. Dann ist f hyperbolisch integrierbar über $\mathbb{F}$. ◇

Beweis
Für eine geeignete Konstante $M > 0$ hat man auch $y^{-2}|f(\tau)| \leq y^{-2}M$ für alle $\tau \in \mathbb{F}$. Nach (4.7) hat $\mathbb{F}$ endliche $\mathbb{H}$-Fläche, das heißt $\tau \mapsto y^{-2}$ ist integrierbar über $\mathbb{F}$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz [K] [Analysis III] XIV. 3.3 ist somit f hyperbolisch integrierbar über $\mathbb{F}$. □

§ 5 Das Petersson-Skalarprodukt

(5.1) Definition
Seien $f, g : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ Funktionen. Dann definiert man $\varphi_{f,g} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi_{f,g}(\tau) := f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

◇

Man berechnet direkt

$$\varphi_{f,f}(\tau) = f(\tau)\overline{f(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k = |f(\tau)|^2(\operatorname{Im}\tau)^k = \tilde{f}(\tau)^2 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H},$$

wobei $\tilde{f}$ wie in [K] III. 1.5 (1) definiert ist. Definition (5.1) stellt also eine Verallgemeinerung dar.

(5.2) Lemma
Für alle $M \in GL_2^+(\mathbb{R})$ und alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$(\det M)^k \varphi_{f|M,g|M}(\tau) = \varphi_{f,g}(M\tau).$$ ◇

Beweis

$$\begin{aligned}
\varphi_{f,g}(M\tau) &= f(M\tau)\overline{g(M\tau)}(\operatorname{Im} M\tau)^k \\
&= (c\tau+d)^k (f|M)(\tau)\overline{(c\tau+d)}^k\overline{(g|M)(\tau)}(\operatorname{Im} M\tau)^k \\
&= (f|M)(\tau)\overline{(g|M)(\tau)}|c\tau+d|^{2k}\frac{(\det M)^k}{|c\tau+d|^{2k}}(\operatorname{Im}\tau)^k \\
&= (\det M)^k (f|M)(\tau)\overline{(g|M)(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \\
&= (\det M)^k \varphi_{f|M,g|M}(\tau).
\end{aligned}$$ □

(5.3) Proposition
Seien $f, g \in \mathbb{M}_k$ mit $k > 0$.

a) Man hat $\varphi_{f,g}(M\tau) = \varphi_{f,g}(\tau)$ für alle $M \in \Gamma$ und alle $\tau \in \mathbb{H}$.
b) $\varphi_{f,g}$ ist genau dann auf $\mathbb{H}$ beschränkt, wenn f oder g eine Spitzenform ist. ◇

Beweis
a) Wegen $\det M = 1, f|M = f$ und $g|M = g$ für alle $M \in \Gamma$ folgt die Behauptung aus (5.2).
b) Man hat für alle $\tau \in \mathbb{H}$ die Identität

$$|\varphi_{f,g}(\tau)| = |f(\tau)\overline{g(\tau)}|(\operatorname{Im}\tau)^k = |fg(\tau)|(\operatorname{Im}\tau)^k = (\tilde{fg})(\tau).$$

Hierbei ist $\tilde{f}$ wie nach der Bemerkung zu Definition 5.1 definiert. Sei $\varphi_{f,g}$, also nach obiger Identität auch $\tilde{fg}$, auf $\mathbb{H}$ beschränkt. Somit ist fg nach [K] Satz III. 1.6 eine Spitzenform vom Gewicht $2k$. Wegen

$$0 = \alpha_{fg}(0) = \alpha_f(0)\alpha_g(0)$$

ist folglich f oder g eine Spitzenform. Ist umgekehrt f oder g eine Spitzenform, so auch fg. Dann ist aber $|\varphi_{f,g}| = \tilde{fg}$ beschränkt auf $\mathbb{H}$. □

Wir kommen nun zu der entscheidenden Definition dieses Vortrages.

Seien $f \in \mathbb{S}_k$ und $g \in \mathbb{M}_k$. Nach (5.3) b) ist $\varphi_{f,g}$ stetig und beschränkt auf $\mathbb{H}$, und somit nach (4.7) hyperbolisch integrierbar über $\mathbb{F}$. Dies rechtfertigt folgende

(5.4) Definition
Für $f \in \mathbb{S}_k$, $g \in \mathbb{M}_k$ definiert man

$$\langle f, g \rangle := \int\limits_{\mathbb{F}} \varphi_{f,g} \, dv = \int\limits_{\mathbb{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, dv(\tau) \in \mathbb{C}.$$

Man nennt $\langle f, g \rangle$ das *Petersson-Skalarprodukt* von f und g. ◇

(5.5) Satz
Das Petersson-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{S}_k \times \mathbb{M}_k \to \mathbb{C}$ definiert eine Sesquilinearform der $\mathbb{C}$-Vektorräume $\mathbb{M}_k$ und $\mathbb{S}_k$. Für $f, f_1, f_2 \in \mathbb{S}_k, g, g_1, g_2 \in \mathbb{M}_k$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt also

- $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$,
- $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$,
- $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$,
- $\langle f, \lambda g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle$.

Beweis
Die Aussagen folgen direkt aus der Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der $\mathbb{C}$-Linearität des Lebesgue-Integrals. □

Schränken wir das Skalarprodukt auf $\mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_k$ ein, so erhalten wir folgenden

(5.6) Satz
Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_k \to \mathbb{C}$ definiert eine positiv definite hermitesche Form auf $\mathbb{S}_k$, das heisst $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist sesquilinear, und für alle $f, g \in \mathbb{S}_k$ gilt zusätzlich

- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,
- $\langle f, f \rangle > 0$, falls $f \neq 0$.

Beweis
Die Sesquilinearität folgt bereits aus Satz (5.5). Weiter hat man

$$\begin{aligned}
\langle g, f\rangle &= \int\limits_{\mathbb{F}} g(\tau)\overline{f(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) \\
&= \int\limits_{\mathbb{F}} \operatorname{Re} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) + i \int\limits_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} \overline{f(\tau)} g(\tau)(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) \\
&= \int\limits_{\mathbb{F}} \operatorname{Re} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) - i \int\limits_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) \\
&= \overline{\int\limits_{\mathbb{F}} \operatorname{Re} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) + i \int\limits_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau)} \\
&= \overline{\langle f, g\rangle}
\end{aligned}$$

Nach Definition ist $\varphi_{f,f}(\tau) \geq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Aus

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int\limits_{\mathbb{F}} |f(\tau)|^2 (\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) \\
&= \int\limits_{\mathbb{F}} |f(\tau)|^2 (\operatorname{Im}\tau)^{k-2} \, d\lambda(\tau) = 0
\end{aligned}$$

folgt wegen der Stetigkeit von f sofort $f_{|\mathbb{F}} \equiv 0$. Da $\mathbb{H}$ von den Bildern von $\mathbb{F}$ unter Γ überdeckt wird, folgt aus der Modularität von f somit auch $f \equiv 0$ auf $\mathbb{H}$. □

Anders ausgedrückt besagt Satz (5.6) somit, dass $(\mathbb{S}_k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum ist. Mit dieser Kenntnis werden wir die Eigenwerte der Hecke-Operatoren auf $\mathbb{S}_k$ in Abschnitt 9 genauer untersuchen.

§ 6 Integration invarianter Funktionen

Im Folgenden sei $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

(6.1) Definition
Man definiert die *Invarianzgruppe* von φ durch

$$\Gamma(\varphi) := \{M \in \Gamma, \varphi(M\tau) = \varphi(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}\}.$$ ◇

(6.2) Proposition
Sei $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ und $M \in \Gamma(\varphi)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\nu = \int_{M\Omega} \varphi \, d\nu,$$

falls eines der beiden Integrale existiert. ◇

Beweis
Mit Ω ist auch $M\Omega$ messbar. Nach (4.5) und wegen $M \in \Gamma(\varphi)$ hat man dann

$$\int_{M\Omega} \varphi(\tau) \, d\nu(\tau) = \int_{\Omega} \varphi(M\tau) \, d\nu(\tau) = \int_{\Omega} \varphi(\tau) \, d\nu(\tau).$$ □

(6.3) Lemma
Sei $\Lambda \leq \Gamma(\varphi)$ mit $-E \in \Lambda$. Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zwei Fundamentalbereiche von Λ, so gilt

$$\int_{\mathcal{F}_1} \varphi \, d\nu = \int_{\mathcal{F}_2} \varphi \, d\nu,$$

falls eines der beiden Integrale existiert. ◇

Beweis
Als abgeschlossene Mengen sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ messbar. Sei $\mathcal{V}$ ein Rechtsvertretersystem von $\Lambda \backslash \{\pm E\}$. Nach Definition eines Fundamentalbereichs gilt

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \mathcal{V}} M\mathcal{F}_1 = \bigcup_{M \in \mathcal{V}} M\mathcal{F}_2,$$

und somit auch

$$\mathcal{F}_1 = \mathbb{H} \cap \mathcal{F}_1 = \bigcup_{M \in \Lambda} M\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1,$$
$$\mathcal{F}_2 = \mathbb{H} \cap \mathcal{F}_2 = \bigcup_{M \in \Lambda} M\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2.$$

Für $M, M' \in \mathcal{V}$ mit M $\neq M'$ gilt nach [K] [Höhere Funktionentheorie I] XXVIII. 3 (FB.2*)

$$\lambda(M\mathcal{F}_1 \cap M'\mathcal{F}_1) = \lambda(M\mathcal{F}_2 \cap M'\mathcal{F}_2) = 0.$$

Man erhält nach Proposition (6.2) und [K] XIV. 3.5 somit

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{F}_1} \varphi \, d\nu &= \int\limits_{\bigcup_{M\in\mathcal{V}} M\mathcal{F}_2\cap\mathcal{F}_1} \varphi \, d\nu \\
&= \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{M\mathcal{F}_2\cap\mathcal{F}_1} \varphi \, d\nu \\
&\overset{5.2}{=} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}_2\cap M^{-1}\mathcal{F}_1} \varphi \, d\nu \\
&= \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}_2\cap M\mathcal{F}_1} \varphi \, d\nu \\
&= \int\limits_{\mathbb{H}\cap\mathcal{F}_2} \varphi \, d\nu \\
&= \int\limits_{\mathcal{F}_2} \varphi \, d\nu,
\end{aligned}$$

denn mit M durchläuft auch M^{-1} ein Vertretersystem von $\Lambda\backslash\{\pm E\}$. □

Für eine Untergruppe $\Lambda \leq \Gamma$ bezeichne $\Lambda\backslash\mathbb{H}$ den Quotientenraum von Λ modulo $\mathbb{H}$, also

$$\Lambda\backslash\mathbb{H} := \{\Lambda\tau; \tau \in \mathbb{H}\}.$$

Lemma (6.3) rechtfertigt nun die folgende formale

(6.4) Definition

Seien $\Lambda \leq \Gamma(\varphi)$ mit $-E \in \Lambda$ und $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von Λ. Man definiert dann

$$\int\limits_{\Lambda\backslash\mathbb{H}} \varphi \, d\nu := \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi \, d\nu,$$

falls das Integral existiert. Nach (6.3) ist die Definition unabhängig von dem jeweiligen gewählten Fundamentalbereich. ◇

(6.5) Satz

Sei $\Lambda \leq \Gamma(\varphi)$ mit $-E \in \Lambda$ und $[\Gamma(\varphi) : \Lambda] < \infty$. Dann gilt die Identität

$$\frac{1}{[\Gamma(\varphi) : \Lambda]} \int\limits_{\Lambda\backslash\mathbb{H}} \varphi \;\, d\nu = \int\limits_{\Gamma(\varphi)\backslash\mathbb{H}} \varphi \;\, d\nu,$$

falls eines der Integrale existiert. ◇

Beweis
Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma(\varphi) \leq \Gamma$. Sei $\{M_1, \ldots, M_d\}$ mit $d = [\Gamma(\varphi) : \Lambda]$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Λ in $\Gamma(\varphi)$. Analog zum Beweis von [K] [Höhere Funktionentheorie I] XXVIII. 3.1 sieht man, dass

$$\mathcal{G} = \bigcup_{v=1}^{d} M_v \mathcal{F}$$

ein Fundamentalbereich von Λ ist. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Lambda \backslash \mathbb{H}} \varphi \, dv &= \int\limits_{\mathcal{G}} \varphi \, dv \\
&= \int\limits_{\bigcup_{v=1}^{d} M_v \mathcal{F}} \varphi \, dv \\
&= \sum_{v=1}^{d} \int\limits_{M_v \mathcal{F}} \varphi \, dv \\
&\overset{6.2}{=} \sum_{v=1}^{d} \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi \, dv \\
&= [\Gamma(\varphi) : \Lambda] \int\limits_{\Gamma(\varphi) \backslash \mathbb{H}} \varphi \, dv.
\end{aligned}$$

□

§7 Orthogonales Komplement der Spitzenformen

Für gerades $k \geq 4$ hat man nach [K] Satz III. 2.1 b) bekanntlich

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} G_k^* \oplus \mathbb{S}_k,$$

wobei G_k^* die normierte Eisensteinreihe zum Gewicht k bezeichnet.

Im Folgenden zeigen wir, dass die obige direkte Summenzerlegung sogar orthogonal bezüglich des Petersson-Skalarproduktes ist. Dazu benötigen wir noch ein

(7.1) Lemma
Die Menge $\mathbb{F}_\infty = \{\tau \in \mathbb{H};\ \mathrm{Re}(\tau) \in [0, 1]\}$ ist ein Fundamentalbereich von Γ_∞. ◇

Beweis
Offensichtlich ist $\mathbb{F}_\infty$ relativ abgeschlossen in $\mathbb{H}$. Für $\tau \in \mathbb{H}$ sei nun $n := \lfloor \operatorname{Re} \tau \rfloor$. Dann ist

$$\operatorname{Re} \pm T^{-n}\tau = \pm(\operatorname{Re} \tau - n)$$

Man wählt nun das Vorzeichen so, dass $\operatorname{Re} \pm T^{-n} \in [0, 1]$. Gehören τ und $\pm T^n \tau$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ beide zum offenen Kern von $\mathbb{F}_\infty$, gilt also

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \tau \in (0, 1) \text{ und} \\ &\pm(\operatorname{Re} \tau - n) \in (0, 1), \end{aligned}$$

so folgt offensichtlich $n = 0$, also $T = \pm E$. Ebenso ist der Rand von $\mathbb{F}_\infty$ eine Lebesgue-Nullmenge, da er die Vereinigung dreier Geradenstücke in $\mathbb{C}$ ist. □

(7.2) Satz
Für $k \geq 4$ gerade und $f \in \mathbb{S}_k$ ist $\langle G_k, f \rangle = \langle G_k^*, f \rangle = 0$. ◇

Beweis
Sei $\mathcal{V}$ ein Vertretersystem der Nebenklassen von Γ_∞ in Γ. Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ hat man nach [K] III. 2.1 (6) die Reihendarstellung

$$G_k^*(\tau) = \sum_{M \in \mathcal{V}} (c\tau + d)^{-k} = \sum_{M \in \mathcal{V}} 1|M(\tau),$$

welche auf jedem Vertikalstreifen, insbesondere also auch auf $\mathbb{F}$, absolut gleichmäßig konvergiert. Man darf somit Integration und Summation vertauschen und erhält wegen $f|M = f$ für alle $M \in \Gamma$ somit

$$\begin{aligned}
\langle G_k^*, f\rangle = & \langle \sum_{M\in\mathcal{V}} 1|M, f\rangle \\
= & \sum_{M\in\mathcal{V}} \langle 1|M, f\rangle \\
= & \sum_{M\in\mathcal{V}} \int_{\mathbb{F}} 1|M(\tau)\overline{f(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) \\
\overset{f|M=f}{=} & \sum_{M\in\mathcal{V}} \int_{\mathbb{F}} 1|M(\tau)\overline{f|M(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k \, d\nu(\tau) \\
= & \sum_{M\in\mathcal{V}} \int_{\mathbb{F}} \varphi_{1|M,f|M}(\tau) \, d\nu(\tau) \\
\overset{5.2}{=} & \sum_{M\in\mathcal{V}} \int_{\mathbb{F}} \varphi_{1,f}(M\tau) \, d\nu(\tau) \\
\overset{4.5}{=} & \sum_{M\in\mathcal{V}} \int_{M\mathbb{F}} \varphi_{1,f}(\tau) \, d\nu(\tau) \\
= & \int_{\bigcup_{M\in\mathcal{V}} M\mathbb{F}} \varphi_{1,f}(\tau) \, d\nu(\tau).
\end{aligned}$$

Nach [K] XXVIII. 3.1 ist $\mathcal{G} = \bigcup_{M\in\mathcal{V}} M\mathbb{F}$ ein Fundamentalbereich von Γ_∞. Wegen

$$\varphi_{1,f}(T\tau) = \overline{f(T\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k = \overline{f(\tau+1)}(\operatorname{Im}\tau)^k = \overline{f(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k = \varphi_{1,f}(\tau)$$

hat man $\Gamma_\infty \subset \Gamma(\varphi_{1,f})$. Nach (7.1) ist auch $\mathbb{F}_\infty$ ein Fundamentalbereich von Γ_∞, und nach Lemma (6.3) gilt folglich

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{M\in\mathcal{V}} M\mathbb{F}} \varphi_{1,f}(\tau) \, d\nu(\tau) &= \int_{\mathbb{F}_\infty} \varphi_{1,f}(\tau) \, d\nu(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{F}_\infty} \overline{f(\tau)} y^k \, d\nu(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{[0,1]} \overline{f(x+iy)} \, dx \right) y^{k-2} \, dy,
\end{aligned}$$

wenn man den Satz von Fubini anwendet. Nach dem Satz über die Fourier-Entwicklung

[K] [Analysis IV] XX. 4.1 hat man für jedes $y \in \mathbb{R}_+^*$ die Identität

$$0 = \overline{\alpha_f(0)} = \int_{[0,1]} \overline{f(x+iy)} dx.$$

Es folgt $\langle G_k^*, f \rangle = 0$. □

§8 Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren

In (5.6) wurde $\mathbb{S}_k$ für $k > 0$, versehen mit dem Petersson-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, als unitärer Raum erkannt. Nach [K] Korollar IV. 1.3 sind die Hecke-Operatoren T_n Endomorphismen von $\mathbb{S}_k$. In diesem Paragraphen zeigen wir, dass die Hecke-Operatoren sogar selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind. Bekanntlich operiert die volle Modulgruppe Γ in natürlicher Weise von Links als auch von Rechts auf

$$\Gamma_p = \{M \in \mathbb{Z}^{2\times 2}, \det M = p\}.$$

Wir benötigen die Existenz eines gemeinsamen Vertretersystems für die Bahnen auf Γ_p bei Links- beziehungsweise Rechtsoperation.

(8.1) Lemma
Für $p \in \mathbb{P}$ existiert ein gemeinsames Vertretersystem von Γ_p modulo Γ. ◇

Beweis
Nach [K] Satz IV. 1.2 bildet

$$\mathcal{V}' = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & p \end{pmatrix}, k = 0, \ldots, p-1 \right\}$$

ein Rechtsvertretersystem von Γ_p modulo Γ. Durch Multiplikation von Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma, k = 0 \ldots n-1$ erhält das Rechtsvertretersystem

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & p+k^2 \end{pmatrix}, k = 0, \ldots, p-1 \right\}.$$

In Folge, dass $\mathcal{V}$ aus symmetrischen Matrizen besteht, gilt

$$\Gamma_p = \Gamma_p^{\mathrm{tr}} = \left(\bigsqcup_{M\in\mathcal{V}} M\Gamma_p \right)^{\mathrm{tr}} = \bigsqcup_{M\in\mathcal{V}} \Gamma_p^{\mathrm{tr}} M^{\mathrm{tr}} = \bigsqcup_{M\in\mathcal{V}} \Gamma_p M.$$

Somit ist $\mathcal{V}$ auch ein Linksvertretersystem. □

Für Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ definiert man bekanntlich die *adjunkte Matrix*

$$M^\# = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Weiter hat man $MM^\# = M^\# M = (\det M)E$.

(8.2) Definition (Hauptkongruenzgruppen)
Für $p \in \mathbb{P}$ definiert man

$$\Gamma(p) := \{M \in \Gamma, M \equiv_p \pm E\}.$$

$\Gamma(p)$ heißt *erweiterte Hauptkongruenzgruppe* der Stufe p. ◇

Wir beschäftigen uns näher mit dem Zusammenhang von Kongruenzgruppen und Invarianzgruppen:

(8.3) Lemma
Seien $f, g : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ Funktionen.
a) Es gilt $\varphi_{f|M,g}(M^{-1}\tau) = \varphi_{f,g|M^\#}(\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{H}, M \in GL_2^+(\mathbb{R})$.
b) Für $f, g \in \mathbb{M}_k, M \in \Gamma_p$ gelten folgende Aussagen:
i) $\Gamma(p), M^{-1}\Gamma(p)M \subset \Gamma(\varphi_{f|M,g})$. Der Index ist jeweils endlich.
ii) $\Gamma(p), M\Gamma(p)M^{-1} \subset \Gamma(\varphi_{f,g|M^\#})$. Der Index ist jeweils endlich.
c) $[\Gamma : \Gamma(p)] = \left[\Gamma : M^{-1}\Gamma(p)M\right]$.
d) Ist $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma(p)$, so gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}\, d\nu = \int_{M^{-1}\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}\, d\nu.$$

◇

Beweis
a)

$$\varphi_{f|M,g}(M^{-1}\tau) = (\det M^{-1})^k \varphi_{f|M|M^{-1},g|M^{-1}}(\tau)$$
$$= (\det M)^{-k}\varphi_{f,g|(\det M)^{-1}M^\#}(\tau) = (\det M)^{-k}\varphi_{f,(\det M)^k g|M^\#}(\tau) = \varphi_{f,g|M^\#}(\tau)$$

b)
i) Sei $L \in \Gamma(p)$ mit $L = \pm E + pA$ für ein $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Dann hat man

$$L_0 := MLM^{-1} = M(\pm E)M^{-1} + pMAM^{-1} = \pm E + MAM^\# \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$$

wegen $\det M = p$. Da Determinante invariant unter Konjugation ist, hat man somit $L_0 \in \Gamma$ und $ML = L_0 M$. Es folgt

$$f|M|L = f|(ML) = f|(L_0M) = (f|L_0)|M = f|M,$$

und daher

$$\varphi_{f|M,g}(L\tau) = (\det L)^k \varphi_{f|M|L,g|L}(\tau) = \varphi_{f|M,g}(\tau),$$

da $g|L = g$. Insgesamt ergibt sich $\Gamma(p) \subset \Gamma(\varphi_{f|M,g})$.

Man hat die Untergruppenkette

$$\Gamma(p) \leq \Gamma(\varphi_{f|M,g}) \leq \Gamma,$$

in der bereits der Index $[\Gamma : \Gamma(p)]$ endlich ist. Somit ist auch $\left[\Gamma(\varphi_{f|M,g}) : \Gamma(p)\right]$ endlich. Sei $L \in \Gamma(p)$ mit $L = \pm E + pA$ für ein $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Dann hat man

$$L_0 := M^{-1}LM = \pm E + pM^{-1}AM = \pm E + M^{\#}AM \in \mathbb{Z}^{2\times 2}.$$

Analog zu oben ist somit $L_0 \in \Gamma$ und somit

$$\begin{aligned}
\varphi_{f|M,g}(M^{-1}LM\tau) &= p^{-k}\varphi_{f|M|M^{-1},g|M^{-1}}(LM\tau) \\
&= p^{-k}\varphi_{f|L,g|M^{-1}L}(M\tau) \\
&= p^{-k}\varphi_{f,g|M^{-1}L}(M\tau) \\
&= \varphi_{f|M,g|M^{-1}LM}(\tau) \\
&= \varphi_{f|M,g}(\tau),
\end{aligned}$$

das heißt $M^{-1}\Gamma(p)M \subset \Gamma(\varphi_{f|M,g})$. Mit $W \in \Gamma(p^2)$ mit $W = \pm E + p^2 A$ für ein $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ hat man

$$MWM^{-1} = \pm E + p^2 MAM^{-1} = \pm E + pMApM^{-1} = \pm E + pMAM^{\#} \in \Gamma(p),$$

und somit $\Gamma(p^2) \subset M^{-1}\Gamma(p)M$. Mit $\left[\Gamma : \Gamma(p^2)\right]$ ist dann aber auch $\left[\Gamma(\varphi_{f,g|M}) : M^{-1}\Gamma(p)M\right]$ endlich.

ii) Vertauscht man die Rollen von f und g, dann folgt die Behauptung direkt aus a), indem man M durch $M^{\#}$ ersetzt.

c) Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma(p)$. Dann hat man

$$\mathbb{H} = M^{-1}\mathbb{H} = M^{-1} \bigcup_{C\in\Gamma(p)} C\mathcal{F} = \bigcup_{C\in\Gamma(p)} M^{-1}CM(M^{-1}\mathcal{F}) = \bigcup_{D\in M^{-1}\Gamma(p)M} DM^{-1}\mathcal{F}.$$

Also ist $M^{-1}\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $M^{-1}\Gamma(p)M$. Es ergibt sich

$$\int\limits_{\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}} dv \overset{6.5}{=} [\Gamma : \Gamma(p)] \int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} dv = \frac{\pi}{3}\,[\Gamma : \Gamma(p)]\,,$$

sowie

$$\begin{aligned}\int\limits_{M^{-1}\mathcal{F}} dv &= \int\limits_{M^{-1}\Gamma(p)M\backslash\mathbb{H}} dv \\ &\overset{6.5}{=} \left[\Gamma : M^{-1}\Gamma(p)M\right] \int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} dv \\ &= \frac{\pi}{3}\left[\Gamma : M^{-1}\Gamma(p)M\right].\end{aligned}$$

Satz (6.5) ist hier wegen $\Gamma(p^2) \le M^{-1}\Gamma(p)M \le \Gamma$ anwendbar. Aus der Invarianz des hyperbolischen Maßes erhält man nach Proposition (6.2) aber auch

$$\int\limits_{\mathcal{F}} dv = \int\limits_{M^{-1}\mathcal{F}} dv,$$

was dann mit obigen Gleichungen die Behauptung liefert.

d) Nach c) ist $[\Gamma : \Gamma(p)] = \left[\Gamma : M^{-1}\Gamma(p)M\right]$, also hat man nach Teil b) i) auch

$$\left[\Gamma(\varphi_{f|M,g}) : \Gamma(p)\right] = \left[\Gamma(\varphi_{f|M,g}) : M^{-1}\Gamma(p)M\right].$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\left[\Gamma(\varphi_{f|M,g}) : \Gamma(p)\right] \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}\, dv &\overset{6.5}{=} \int\limits_{\Gamma(\varphi_{f|M,g})\backslash\mathbb{H}} \varphi_{f|M,g}\, dv \\ &= \left[\Gamma(\varphi_{f|M,g}) : M^{-1}\Gamma(p)M\right] \int\limits_{M^{-1}\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}\, dv.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt den zentralen Satz von der Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren bezüglich des Petersson-Skalarprodukts beweisen:

(8.4) Satz

Für alle $f, g \in \mathbb{S}_k$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\langle T_n f, g\rangle = \langle g, T_n f\rangle$. ◇

Beweis
Nach [K] Satz IV. 2.3 ist jedes T_n ein Polynom über $\mathbb{Q}$ in gewissen T_p für $p \in \mathbb{P}$. Wegen der Linearität von $T \mapsto T^*$ und $(T^m)^* = (T^*)^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ genügt es somit die Behauptung für T_p mit $p \in \mathbb{P}$ zu zeigen. Sei nun also $\mathcal{V}$ ein gemeinsames Rechts- und Linksvertretersystem von Γ_p modulo Γ gemäß Lemma (8.1) und $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma(p)$. Nach [K] Satz IV. 1.3 hat man für die Hecke-Operatoren die Darstellung

$$T_p f = p^{k-1} \sum_{M \in \mathcal{V}} f|M,$$

woraus sich dann für alle $\tau \in \mathbb{H}$ auch

$$\begin{aligned}
\varphi_{T_p f, g}(\tau) &= p^{k-1} \left(\sum_{M \in \mathcal{V}} (f|M)(\tau) \right) \cdot \overline{g(\tau)} (\operatorname{Im} \tau)^k \\
&= p^{k-1} \sum_{M \in \mathcal{V}} (f|M)(\tau) \cdot \overline{g(\tau)} (\operatorname{Im} \tau)^k \\
&= p^{k-1} \sum_{M \in \mathcal{V}} \varphi_{f|M, g}(\tau)
\end{aligned}$$

ergibt. Unter Beachtung von $\Gamma(\varphi_{T_pf,g}) = \Gamma$ erhält man

$$\begin{aligned}
\langle T_pf, g\rangle &= \int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \varphi_{T_pf,g}\, d\nu \\
&\overset{6.5}{=} \frac{1}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \int\limits_{\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}} \varphi_{T_pf,g}\, d\nu \\
&= \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \int\limits_{\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}} \sum_{M\in\mathcal{V}} \varphi_{f|M,g}\, d\nu \\
&= \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}\, d\nu \\
&\overset{8.3d)}{=} \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{M^{-1}\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}\, d\nu \\
&\overset{4.5}{=} \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi_{f|M,g}(M^{-1}\tau)\, d\nu(\tau) \\
&\overset{8.3a)}{=} \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi_{f,g|M^\#}\, d\nu(\tau) \\
&= \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}^\#} \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi_{f,g|M}\, d\nu(\tau).
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun umgekehrt $\langle f, T_pg\rangle$, so ergibt sich schliesslich

$$\begin{aligned}
\langle f, T_pg\rangle &= \overline{\langle T_pg, f\rangle} \\
&= \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}} \overline{\varphi_{g|M,f}}\, d\nu(\tau) \\
&= \frac{p^{k-1}}{[\Gamma:\Gamma(p)]} \sum_{M\in\mathcal{V}} \int\limits_{\mathcal{F}} \varphi_{f,g|M}\, d\nu.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{V}$ auch ein Linksvertretersystem ist, bildet somit $\mathcal{V}^\#$ ein Rechtsvertretersystem von Γ modulo Γ_p. Es folgt $\langle T_pf, g\rangle = \langle f, T_pg\rangle$. □

§9 Eine ausgezeichnete Basis von $\mathbb{S}_k$

Aus dem Resultat von (8.4) können wir nun die Existenz einer ausgezeichneten Basis von $\mathbb{S}_k$ beweisen. Zuvor benötigen wir allerdings ein Ergebnis aus der Linearen Algebra.

(9.1) Lemma
Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}^{t \times t}$ eine Menge von hermiteschen und paarweise kommutierenden Matrizen, das heißt es gelte

$$H = \overline{H}^t \text{ und } HK = KH$$

für alle $H, K \in \mathcal{M}$. Dann lässt sich $\mathcal{M}$ simultan unitär diagonalisieren. Es existiert also ein $W \in U(t)$, so dass $\overline{W}^t HW$ für alle $H \in \mathcal{M}$ eine Diagonalmatrix ist. $\diamond$

Beweis
Wir beweisen die Behauptung per vollständiger Induktion nach t. Da im Fall $t = 1$ bereits jede Matrix Diagonalgestalt hat, ist die Behauptung mit $W = (1)$ offensichtlich. Sei nun $n > 1$. Besteht $\mathcal{M}$ bereits aus Diagonalmatrizen, so ist die Behauptung mit $W = E$ bereits bewiesen. Sei also $S \in \mathcal{M}$ eine Matrix, welche nicht Diagonalform hat. Nach dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen existiert ein $W \in U(t)$, so dass

$$\overline{W}^t SW = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad E = E^{(r)}, 1 \leq r < t,$$

wobei T eine Diagonalmatrix vom Format $(t-r) \times (t-r)$ ist mit $\lambda \notin \sigma(T)$. Für $M \in \mathcal{M}$ schreibe nun

$$\overline{W}^t MW = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{C}^{r \times r}.$$

Da M hermitesch war, folgt somit $B = \overline{C}^t$.

$$\begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ TC & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \lambda C & * \end{pmatrix}.$$

Da mit M und S natürlich auch $\overline{W}^t MW$ und $\overline{W}^t SW$ kommutieren, ergibt sich dann $TC = \lambda C$. Dann ist aber $C = 0$, dann sonst gäbe es eine Spalte von C, welche

Eigenvektor von T zum Eigenwert λ wäre, was einen Widerspruch zu $\lambda \notin \sigma(T)$ liefere. $B = \overline{C}^t$ impliziert dann auch $B = 0$. Man erhält also

$$\overline{W}^t MW = \begin{pmatrix} A_M & 0 \\ 0 & D_M \end{pmatrix} \text{ für alle } M \in \mathcal{M}.$$

Wegen der Blockgestalt sind natürlich alle $A_M, M \in \mathcal{M}$ hermitesch und vertauschbar. Selbiges gilt für die $D_M, M \in \mathcal{M}$. Man kann die Induktionsvoraussetzung also auf die Mengen

$$\mathcal{M}_1 := \{A_M, M \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathbb{C}^{r\times r} \text{ und } \mathcal{M}_2 := \{D_M, M \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$$

anwenden und erhält Matrizen $W_1 \in U(r), W_2 \in U(n-r)$, so dass $\overline{W_1}^t A_M W_1$ beziehungsweise $\overline{W_2}^t D_M W_2$ für alle $M \in \mathcal{M}$ Diagonalform haben. Mit W_1 und W_2 ist dann aber auch

$$L := \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$$

unitär, und $\overline{L}^t ML$ hat Diagonalgestalt für alle $M \in \mathcal{M}$. □

Für den Rest dies Abschnitts sei $t := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_k$ und $k > 0$.

(9.2) Satz
Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_t\}$ von $\mathbb{S}_k$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) Es gilt $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq t$,
b) Jedes $f \in \mathcal{B}$ ist eine simultane Eigenform bezüglich der Hecke-Operatoren T_n,
c) Für jedes $f \in \mathcal{B}$ ist $\alpha_f(m) \in \mathbb{R}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. ◇

Beweis
Sei $\mathcal{C} = \{g_1, \ldots g_t\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathbb{S}_k$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Wir gehen von dem $\mathbb{C}$-Algebren-Isomorphismus

$$\phi : \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_k \to \mathbb{C}^{t\times t}, \quad \varrho \mapsto M_{\mathcal{C}}(\varrho)$$

aus. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $H_n = \phi(T_n)$. Da alle T_n paarweise kommutieren, gilt selbiges auch für die H_n. Wegen der Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren sind somit auch alle H_n hermitesch. Wir wenden jetzt Lemma (9.1) auf die Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, und erhalten ein $W \in U(t)$ und Folgen $(\lambda_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ für $1 \leq i \leq t$ mit

$$H_n = \overline{W}^t L_n W$$
$$L_n = \operatorname{diag}\,(\lambda_1(n), \cdots, \lambda_t(n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $(f_1, \cdots, f_t)^t = \overline{W}^t (g_1, \cdots, g_t)^t$ und $\mathcal{B} = \{f_1, \dots f_t\}$. Seien $G_{\mathcal{B}}$ und $G_{\mathcal{C}}$ die Gram-Matrizen bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ beziehungsweise $\mathcal{C}$, wobei man wegen der Orthonormalität von $\mathcal{C}$ natürlich $G_{\mathcal{C}} = E$ hat. Für die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ hat man dann nach Definition $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \overline{W}^t$. Nach Linearer Algebra ergibt sich somit

$$G_{\mathcal{B}} = \overline{\overline{W}^t}^t E \overline{W}^t = E.$$

Folglich ist auch $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis. Bezeichnet $\kappa_{\mathcal{C}}$ die Koordinatenabbildung bezüglich der Basis $\mathcal{C}$, so erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1 \dots t\}$ schliesslich

$$\begin{aligned}
T_n f_i &= \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}(H_n \kappa_{\mathcal{C}}(f_i)) \\
&= \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}(H_n(\overline{w_{i,1}}, \cdots, \overline{w_{i,t}})^t) \\
&= \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}(\overline{W}^t L_n W (\overline{w_{i,1}}, \dots, \overline{w_{i,t}})^t) \\
&= \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}(\overline{W}^t L_n e_i^t) \\
&= \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}(\overline{W}^t \lambda_i(n) e_i^t) \\
&= \lambda_i(n) \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}(\overline{W}^t e_i^t) \\
&= \lambda_i(n) \kappa_{\mathcal{C}}^{-1}((\overline{w_{i,1}}, \cdots, \overline{w_{i,t}})^t) \\
&= \lambda_i(n) f_i.
\end{aligned}$$

Also besteht $\mathcal{B}$ aus simultanen Eigenformen bezüglich aller Hecke-Operatoren. Für $i \in \{1 \dots t\}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere $\alpha_i(n) := \alpha_{f_i}(n)$. Ersetzt man f_i gegebenenfalls durch $e^{-i \arg \alpha_i(1)} f_i$, so kann man $\alpha_i(1) \in \mathbb{R}$ annehmen. Da hermitesche Matrizen ein reelles Spektrum besitzen, ist $\lambda_i(n) \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach [K] IV. 1.4 (3) gilt $\alpha_i(n) = \lambda_i(n)\alpha_i(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit sind alle Fourier-Koeffizienten von f_i reell. □

Eine algebraische Zahl $z \in \overline{\mathbb{Q}}$ heisst *total-reell* über $\mathbb{Q}$, wenn alle Nullstellen des Minimalpolynoms von z reell sind.

(9.3) Korollar
Die Eigenwerte der Hecke-Operatoren T_n auf $\mathbb{M}_k$ sind ganz-algebraisch und total-reell über $\mathbb{Q}$ von einem Grad kleiner gleich t. ◇

Beweis
Sei $f \in \mathbb{M}_k$ mit $T_n f = \lambda_f(n) f$. Ist f keine Spitzenform, also $\alpha_f(0) \neq 0$, so folgt $\lambda_f(n) = \sigma_{k-1}(n) \in \mathbb{Z}$ aus [K] IV. 1.3 (4). Ist f dagegen eine Spitzenform, dann sind

die Fourier-Koeffizienten von f ganz-algebraische Zahlen von einem Grad kleiner gleich t nach (2.3). Aus Satz (9.2) erhält man $a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{C}$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{t} a_i f_i.$$

Es ergibt sich

$$\lambda_f(n) f = \sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_f(n) f_i,$$

$$T_n f = \sum_{i=1}^{t} a_i T_n f_i = \sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_i(n) f_i.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $a_i\lambda_f(n) = a_i\lambda_i(n)$ für alle $i \in \{1, \ldots, t\}$. Wegen $f \neq 0$ existiert ein $i_0 \in \{1, \ldots, t\}$, so dass $a_{i_0} \neq 0$, also $\lambda_f(n) = \lambda_{i_0}(n) \in \mathbb{R}$. □

(9.4) Korollar
Sei $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ eine simultane Eigenform bezüglich aller Hecke-Operatoren. Dann sind die Quotienten

$$\left(\frac{\alpha_f(n)}{\alpha_f(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ganz-algebraisch und total-reell über $\mathbb{Q}$ von einem Grad kleiner gleich t. ◇

Beweis
Nach [K] Lemma IV. 1.4 gilt $\lambda_f(n) = \frac{\alpha_f(n)}{\alpha_f(1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Behauptung aus (9.4). □

Satz (9.2) kann somit verschärft werden zu folgendem

(9.5) Satz
Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_t\}$ von $\mathbb{S}_k$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) Es gilt $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq t$,
b) Jedes $f \in \mathcal{B}$ ist eine simultane Eigenform bezüglich der Hecke-Operatoren T_n,
c) Für alle $f \in \mathcal{B}$ sind die Quotienten

$$\left(\frac{\alpha_f(n)}{\alpha_f(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ganz-algebraisch und total-reell über $\mathbb{Q}$ von einem Grad kleiner gleich t. ◇