Partitionen I

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 02.07.2008

Claudia Alfes

In diesem Vortrag werden wir uns mit Partitionen und Partitionsfunktionen beschäftigen. Diese spielen eine wichtige Rolle in der additiven Zahlentheorie.

Zunächst betrachten wir einige Beispiele von Partionen und Partitionsfunktionen um mit den Begriffen vertraut zu werden. Danach konzentrieren wir uns auf die Partitionsfunktion $p(n)$, die angibt, wieviele Möglichkeiten es gibt eine natürliche Zahl n in Summanden, die kleiner oder gleich n sind, zu zerlegen. Wir werden Erzeugende dieser Funktion kennenlernen, sowie eine Rekursionsformel und eine obere Schranke dieser Funktion herleiten.

§1 Einführung in das Thema

— *Definition* —

(1.1) Definition (Partition)
Sei $M = \{m_1, m_2, \dots\}$ eine Menge mit Elementen aus $\mathbb{Z}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Darstellung von n als Summe von Elementen aus M nennt man *Partition von n*. ◇

(1.2) Bemerkung
Eine Funktion, die die Anzahl der Partionen einer natürlichen Zahl n mit Summanden aus einer Menge M angibt, bezeichnen wir mit Partitionsfunktion. Hierbei besteht die Menge M oft aus speziellen Zahlen, wie zum Beispiel Quadratzahlen oder Primzahlen. Zudem gibt es Unterschiede hinsichtlich der Beachtung der Reihenfolge und der Wiederholung von Summanden. ◇

In den folgenden Beispielen lernen wir einige Partitionsfunktionen kennen. Als erstes Beispiel betrachten wir die

— Die Goldbachsche Vermutung —

(1.3) Beispiel (Goldbachsche Vermutung)
Jede gerade Zahl größer als 4 kann als Summe zweier ungerader Primzahlen geschrieben werden. Hier gibt die Partitionsfunktion die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$n = p_1 + p_2, \quad \text{wobei } p_1 \text{ und } p_2 \text{ ungerade Primzahlen sind, an.}$$

Die Menge der Summanden besteht also aus den ungeraden Primzahlen. Goldbach äußerte diese Vermutung 1742 in einem Brief an Euler. Bis heute ist die Vermutung ungelöst. In 1937 bewies der russische Mathematiker Vinogradov, dass jede hinreichend große ungerade Zahl als Summe von drei Primzahlen geschrieben werden kann. 1966 zeigte der chinesische Mathematiker Chen, dass jede hinreichend große Zahl als Summe einer Primzahl und einer Zahl geschrieben werden kann, die höchstens zwei Primfaktoren besitzt. ◇

— Darstellung durch Quadrate —

(1.4) Beispiel (Darstellung durch Quadrate)
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Gleichung

$$n = x_1^2 + \cdots + x_k^2 \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 1 \leq i \leq k.$$

Hier wird die Reihenfolge der Summanden beachtet. Die zugehörige Partitionsfunktion gibt also die Anzahl der Lösungen der obigen Gleichung an. Wir bezeichnen diese Funktion mit $r_k(n)$.

Jacobi hat $r_k(n)$ für $k = 2, 4, 6, 8$ durch Teilersummen ausgedrückt. Für $r_2(n)$ haben wir zum Beispiel

$$r_2(n) = 4\left(d_1(n) - d_3(n)\right),$$

wobei $d_1(n)$ und $d_3(n)$ die Anzahl der Teiler von n angeben, die kongruent 1 beziehungsweise 3 modulo 4 sind.

Es gilt also $r_2(5) = 8$, denn die beiden Teiler 1 und 5 sind kongruent 1 modulo 4. Wir verifizieren: $5 = 2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 = (-2)^2 + 1^2 = 1^2 + (-2)^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 2^2 + (-1)^2 = (-1)^2 + 2^2$.

Für $k = 4$ gilt folgende Formel

$$r_4(n) = 8 \sum_{d \mid n,\ 4 \nmid d} d.$$

Diese hatten wir bereits im Vortrag „Modulformen zu Kongruenzuntergruppen I“ kennengelernt. Die Formeln für $r_6(n)$ und $r_8(n)$ sind komplizierter, aber vom selben Typ.

Auch für $k = 3, 5, 7$ gibt es genaue Formeln. Diese benutzen Jacobis Erweiterung von Legendres Symbol für quadratische Residuen. Dieses werden wir nun einführen. ◇

(1.5) Definition (Quadratisches Residuum)
Sei p eine ungerade Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. Weiter sei $a \not\equiv 0 \pmod{p}$. Man nennt *a quadratisches Residuum* oder *quadratischen Rest* modulo p, wenn $x^2 \equiv a \pmod{p}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ hat. Existiert keine solche Lösung x, so heißt *a nicht-quadratisches Residuum*. ◇

Zur Illustration dient das folgende

(1.6) Beispiel
Sei $p = 3$. Dann ist 1 quadratisches Residuum modulo 3, denn $1^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Die Zahl 2 ist nicht-quadratisches Residuum modulo 3, da $1^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$ und $2^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$. ◇

Um das Jacobi-Symbol einführen zu können, benötigen wir zunächst das Legendre-Symbol.

(1.7) Definition (Legendre-Symbol)
Sei p eine ungerade Primzahl. Für jede ganze Zahl a ist das *Legrende-Symbol* definiert durch

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } a \text{ quadratischer Rest} \pmod{p}, \\ -1, & \text{wenn } a \text{ nicht-quadratischer Rest} \pmod{p}, \\ 0, & \text{wenn } p \text{ teilt } a. \end{cases}$$

Nun kommen wir zu dem Jacobi-Symbol, welches wir im Folgenden für die Darstellung von $r_3(n)$ benötigen.

(1.8) Definition (Jacobi-Symbol)
Sei n eine ungerade, positive ganze Zahl mit der Primfaktorzerlegung $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ und $a \in \mathbb{Z}$, dann ist das *Jacobi-Symbol* $\left(\frac{a}{n}\right)$ definiert durch

$$\left(\frac{a}{n}\right) := \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a}{p_i}\right)^{e_i}.$$

(1.9) Beispiel (Fortführung von (1.3))
Wir können nun mit den oben eingeführten Begriffen eine Formel für einen Spezialfall von $k = 3$ angeben. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann gilt für $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ mit $x_i \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(x_1, x_2, x_3) = 1$ folgende Formel

$$r_3(n) = \begin{cases} 24 \sum\limits_{m \leq \frac{n}{4}} \left(\frac{m}{n}\right), & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 4, \\ 8 \sum\limits_{m \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{m}{n}\right), & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Für größere Werte von k ist die Analyse von $r_k(n)$ weit komplizierter. Bedeutende Beiträge wurden von Mordell, Hardy, Littlewood und Ramanujan geleistet.

Für $k \geq 5$ können wir $r_k(n)$ durch eine Formel der Form $r_k(n) = p_k(n) + R_k(n)$ ausgedrücken. Dabei ist $p_k(n)$ eine Folge der Form

$$p_k(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}} n^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ \operatorname{ggT}(h,q)=1}}^{q} \left(\frac{G(h;q)}{q}\right)^k \exp\left(\frac{-2\pi n h}{q}\right),$$

wobei die $G(h;q)$ quadratische Gauss-Summen sind, also

$$G(h;q) = \sum_{r=1}^{q} \exp\left(\frac{2\pi i h r^2}{q}\right).$$

Die Reihe $p_k(n)$ ist eine sogenannte singuläre Reihe und wird mit Hauptterm bezeichnet. Desweiteren bezeichnen wir $r_k(n)$ als Nebenterm.

Mordell bemerkte 1917, dass $r_k(n)$ der Koeffizient von x^n in der Potenzreihenentwicklung der k-ten Potenz der Reihe

$$\vartheta = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$$

ist. Die Funktion ϑ steht, wie wir wissen, in engem Zusammenhang mit elliptischen Modulfunktionen. Diese spielen eine wichtige Rolle in der Herleitung der asymptotischen Formel für $r_k(n)$. Im Vortrag „Modulformen zu Kongruenzuntergruppen I“ hatten wir bereits eine dieser Potenzreihenentwicklungen kennengelernt. ◇

— Waringsches Problem —

(1.10) Beispiel (Waringsches Problem)
Sei $x_i \in \mathbb{Z}$ und $1 \leq i \leq s$. Wir versuchen zu bestimmen, ob es für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ ein $s \in \mathbb{N}$ gibt (welches nur von k abhängt), sodass die Gleichung

$$n = x_1^k + \cdots + x_s^k$$

Lösungen für jedes $n \geq 1$ besitzt.

In diesem Beispiel ist die Partitionsfunktion die Anzahl der Lösungen von obiger Gleichung und das Problem ist, zu entscheiden, ob ein s existiert, sodass die Partitionsfunktion größer oder gleich 1 für alle $n \geq 1$ ist. Die kleinstmögliche Zahl s für einen Exponenten k bezeichnen wir mit $g(k)$.

Das Problem ist nach dem englischen Mathematiker E. Waring benannt, der 1770 behauptete, dass jedes n die Summe von vier Quadraten, neun Kubikzahlen, 19 vier-Potenzen,... ist. Das Waringsche Problem ist also eine Verallgemeinerung des Vier-Quadrate-Satzes, den wir bereits kennengelernt haben. Waring bewies seine Vermutung nicht und erbrachte nur einen begrenzten numerischen Beweis.

Lagrange bewies die Existenz von $g(2)$ (Vier-Quadrate Satz) im Jahr 1770 und in den nachfolgenden 139 Jahren wurde die Existenz von $g(k)$ für $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$ gezeigt. 1909 bewies Hilbert die Existenz von $g(k)$ für alle k mit einem induktiven Argument, aber er bestimmte für kein k den numerischen Wert.

Der Wert von $g(4)$ wurde erst 1986 bestimmt.R. Balasubramanian, F. Dress, und J.-M. Deshouillers zeigten, dass $g(4) = 19$ gilt.

Hardy und Littlewood gaben eine asymtotische Formel für die Berechnung der Anzahl der Lösungen von $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$ an. Diese ist eine singuläre Reihe, analog zu der, die wir im Beispiel zuvor kennengelernt haben. (Für eine historische Einordnung/Betrachtung des Waringschen Problems sei hier auf Ellison, W. J.: Waring's problem. Amer. Math. Monthly, 78; 10-36 (1971) verwiesen.) $\diamond$

— *Die Partitionsfunktion $p(n)$* —

Eines der fundamentalsten Probleme der additiven Zahlentheorie ist das der unbeschränkten Partitionen.

(1.11) Definition (Partitionsfunktion $p(n)$)
Wir betrachten die Partitionsfunktion, die angibt, wieviele Möglichkeiten es gibt, ein positives ganzes n als Summe von positiven ganzen Zahlen kleiner oder gleich n zu schreiben.

Dabei besteht die Menge der Summanden aus allen positiven ganzen Zahlen und die Anzahl der Summanden ist nicht beschränkt, Wiederholung ist erlaubt und die Reihenfolge der Summanden wird nicht beachtet.

Die oben charakterisierte Partitionsfunktion bezeichnen wir mit $p(n)$. Diese Funktion heißt *unbeschränkte Partitionsfunktion* oder *die Partitionsfunktion*. Die Summanden heißen *Teile*. ◇

Der Begriff Partitionsfunktion wird also in zwei Bedeutungen gebraucht. Zum Einen als Obergriff für verschiedene Funktionen, die die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n angibt und zum Anderen nennen wir die gerade definierte Funktion die Partitionsfunktion.

(1.12) Beispiel
Es ist $p(4) = 5$, denn wir erhalten

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Für 5 erhalten wir $p(5) = 7$, denn es gilt

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1\ .$$

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Partitionsfunktion $p(n)$ und verwandten Funktionen.

§2 Erzeugende Funktionen für Partitionen

Wir lernen zunächst erzeugende Funktionen kennen. Danach wenden wir uns speziell der erzeugenden Funktion von $p(n)$ zu, die wir aus dem Satz von Euler bekommen.

— *Erzeugende Funktion* —

(2.1) Definition (Erzeugende Funktion)
Sei $z \in \mathbb{C}$. Unter der *erzeugenden Funktion* einer komplexen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Man kann ebenfalls erzeugende Funktionen von Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ angeben. ◇

(2.2) Bemerkung
In der multiplikativen Zahlentheorie sind wegen der Relation $n^{-s}m^{-s} = (nm)^{-s}$ Dirichlet-Reihen als erzeugende Funktionen sehr nützlich. Diese haben wir in der Funktionentheorie I kennengelernt.

In der additiven Zahlentheorie verwendet man wegen der Relation $x^n x^m = x^{n+m}$ Potenzreihen der Gestalt:

$$\sum f(n) x^n.$$

Ein sehr einfaches Beispiel ist die erzeugende Funktion der Folge 1, 1, 1, 1, ..., diese ist die geometrische Reihe. ◇

Im folgenden Satz lernen wir nun eine erzeugende Funktion der Partitionsfunktion $p(n)$ kennen.

— Satz von Euler —

(2.3) Satz (Satz von Euler)
Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \,, \quad \text{wobei } p(0) = 1 \,.$$

Beweis
Zunächst geben wir einen informalen Beweis an.

Wenn wir jeden Faktor des Produkts $\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}$ für $0 \leq x < 1$ durch die geometrische Reihe ausdrücken, erhalten wir

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \left(1 + x + x^2 + \ldots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right)\left(1 + x^3 + x^6 + \ldots\right) \ldots$$

Wir behandeln die rechte Seite nun wie Polynome und achten nicht auf Konvergenzfragen. Wir multiplizieren die Polynome auf der rechten Seite und betrachten gleiche Potenzen von x. So erhalten wir eine Potenzreihe der Form $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k) x^k$. Wir wollen nun zeigen, dass $a(k) = p(k)$ gilt.

Dazu nehmen wir den Term x^{k_1} der ersten Reihe, den Term x^{2k_2} der zweiten Reihe, den Term x^{3k_3} der dritten Reihe, ..., und den Term x^{mk_m} der m-ten Reihe. Dabei ist $k_i \geq 0$ für jedes $1 \leq i \leq m$. Nun betrachten wir das Produkt der x^{ik_i} und erhalten

$$x^{k_1} x^{2k_2} x^{3k_3} \ldots x^{mk_m} = x^k, \quad \text{wobei } k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + mk_m.$$

Die Menge der Summanden von k besteht also hier aus den Potenzen von x, die, wie oben aufsummiert, k ergeben. Wir können k auch schreiben als

$$k = (1 + \ldots + 1) + (2 + \ldots + 2) + \ldots (m + \ldots + m) \ ,$$

wobei wir in der ersten Klammer k_1 Summanden haben, in der zweiten Klammer k_2, ..., und in der letzten Klammer k_m.

So haben wir also eine Partition von k in positive Summanden erhalten. Jede Partition von k erzeugt einen Term x^k und umgekehrt kommt jedes x^k von einer entsprechenden Partition von k, also ist der Koeffizient $a(k)$ von x^k gleich der Anzahl der Partitionen von k, das heißt $a(k) = p(k)$.

Zur Veranschaulichung für $k = 3$: Hier erhalten wir $x^3 = x^1 \cdot x^2$ aus der ersten und zweiten Summe, $x^3 \cdot 1$ aus der ersten und zweiten Summme und $1 \cdot 1 \cdot x^3$ aus der ersten, zweiten und dritten Summe, also genau die Partitionen von 3, denn $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = 1 + 1 \cdot 2$.

In diesem Beweis haben wir Konvergenzfragen ignoriert und unendliche Reihen wie Polynome behandelt. Allerdings veranschaulicht dieser informale Beweis die Ideen, die wir gleich im formalen Beweis ausführen möchten.

Sei nun zunächst $0 \leq x < 1$. Wir betrachten

$$F_m(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - x^k} \quad \text{und } F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \lim_{m \to \infty} F_m(x).$$

Aus der absoluten Kovergenz der geometrischen Reihe folgt aus der Funktionentheorie (Krieg: Höhere Funktionentheorie I, XXVI (3.6)) die absolute Konvergenz des Produkts $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - x^k\right)$, also ist auch das Inverse dieses Produkts, nämlich F, absolut konvergent.

Weiter erhalten wir die Monotonie von $(F_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$. Wegen $0 \leq x < 1$ ist nämlich $1 - x^{m+1} \leq 1$, also

$$\frac{1}{1 - x^{m+1}} \geq 1$$

und damit

$$F_{m+1}(x) = \frac{1}{1 - x^{m+1}} F_m(x) \geq F_m(x) \ .$$

Wir wissen also, dass $(F_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ monoton steigend ist und erhalten so ebenfalls, dass

$$F_m(x) \leq F(x) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ und für festes } 0 \leq x < 1 \text{ gilt.}$$

Als Produkt endlich vieler absolut konvergenter Potenzreihen ist auch F_m absolut konvergent, und nach der Idee aus dem informalen Beweis schreiben wir

$$F_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k)x^k.$$

Hier ist $p_m(k)$ also die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$k = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m.$$

Das heißt, dass $p_m(k)$ die Anzahl von Partitionen von k in positive Summanden ist, die nicht größer als m sind. Für $m \geq k$ ist nach der Definition der Partitionsfunktion $p_m(k) = p(k)$, also haben wir erhalten, dass $p_m(k) \leq p(k)$ für alle $m < k$ und $p_m(k) = p(k)$ für alle $m \geq k$ gilt. Als Grenzwert geschrieben bedeutet dies $\lim_{m\to\infty} p_m(k) = p(k)$.

Nun teilen wir F_m als Reihe in zwei Summanden auf:

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \sum_{k=0}^{m} p_m(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} p(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k, \quad \text{da } p_m(k) = p(k) \text{ für } m \geq k \text{ ist.} \end{aligned}$$

Wir müssen also noch zeigen, dass wir in der zweiten Summe auch über $p(k)$ summieren. Da $x \geq 0$ ist, gilt

$$\sum_{k=0}^{m} p(k)x^k \leq F_m(x) \leq F(x),$$

also ist $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ als beschränkte Reihe mit positiven Summanden absolut konvergent.

Da wir weiterhin wissen, dass $p_m(k) \leq p(k)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir zudem

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq F(x),$$

also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k$ für festes $0 \leq x < 1$ gleichmäßig in m. Wir können also Summen- und Limesbildung vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{m\to\infty} F_m(x) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \\ &\leq F(x). \end{aligned}$$

Wir haben also Eulers Identität für $0 \leq x < 1$ gezeigt, da an dieser Stelle überall die Gleichheit folgt. Da die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ nicht diskret im Einheitskreis ist, folgt mit dem Identitätssatz die Behauptung für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. $\square$

— *Erzeugende Funktionen* —

Nun sehen wir eine Tabelle mit verschiedenen erzeugenden Funktionen. Diese kann man mit ählichen Argumenten wie im Satz von Euler finden.

Erzeugende Funktion	Die Anzahl von Partitionen von n in Summanden die
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}$	ungerade sind.
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}$	gerade sind.
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{m^2}}$	Quadrate sind.
$\prod_{p} \frac{1}{1-x^{p}}$	Primzahlen sind.
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^m)$	ungleich sind.
$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1+x^{2m-1}\right)$	ungerade und ungleich sind.
$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1+x^{2m}\right)$	gerade und ungleich sind.
$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1+x^{m^2}\right)$	verschiedene Quadrate sind.
$\prod_{p} (1+x^p)$	verschiedene Primzahlen sind.

§3 Eulers Pentagonalzahlensatz

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Partitionsfunktion, die von dem Produkt $\prod(1-x^m)$ erzeugt wird, dem Inversen der erzeugenden Funktion von $p(n)$.

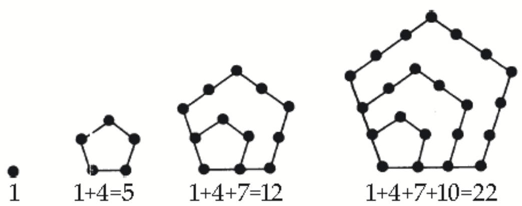
(3.1) Definition (Pentagonalzahlen)
Für $n \in \mathbb{N}$ heißen

$$\omega(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 3k+1 = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2-n}{2} \quad \text{und} \quad \omega(-n) = \frac{3n^2+n}{2}$$

Pentagonalzahlen. ◇

(3.2) Bemerkung
Pentagonalzahlen sind Partialsummen der Folge $a_k = 3k+1$, $k \geq 0$.

Der geometrischen Anschauung dienen die folgenden Skizzen:



(3.3) Bemerkung
Wir schreiben

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n.$$

Um $a(n)$ als Partitionsfunktion aufzufassen, bemerken wir, dass jede Partition von n in ungleiche Teile einen Koeffizienten $+1$ oder -1 vor dem Term x^n bewirkt. Der Koeffizient ist $+1$, wenn x^n das Produkt einer geraden Anzahl von Faktoren ist und -1, wenn x^n Produkt einer ungeraden Anzahl von Faktoren ist. Wir schreiben $a(n)$ wie folgt:

$$a(n) = p_e(n) - p_o(n),$$

wobei $p_e(n)$ die Anzahl von Partitionen von n in ungleiche Teile gerader Anzahl und $p_o(n)$ die Anzahl von Partitionen von n in ungleiche Teile ungerader Anzahl angibt. Im Folgenden werden wir zeigen, dass $p_e(n) = p_o(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, außer den Pentagonalzahlen, gilt. ◇

(3.4) Satz (Eulers Pentagonalzahlensatz)
Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1-z^m) &= 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n z^{\omega(n)}.\end{aligned}$$

Beweis
Wieder beweisen wir den Satz zunächst nur für alle $0 \leq x < 1$ und folgern dann die Behauptung für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ mit dem Identitätssatz.

Sei $P_0 = S_0 = 1$. Für $n \geq 1$ definieren wir:

$$P_n := \prod_{r=1}^{n}(1-x^r) \text{ und } S_n := 1 + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \left(x^{\omega(r)} + x^{\omega(-r)}\right) .$$

Es ist $\lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{r=1}^{\infty}(1-x^r)$ und die absolute Konvergenz dieses Produkts folgt wieder aus der absoluten Konvergenz der geometrischen Reihe.

Wir zeigen nun mit einer Methode von Shanks, dass

$$|S_n - P_n| \leq n x^{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn für $0 \leq x < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n x^{n+1} = 0.$$

Man schreibe hierzu $nx^{n+1} = n \exp((n+1)\ln x)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln x = -\infty$, denn der Logarithmus ist für $0 < x < 1$ negativ. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion kann man den Grenzwert hineinziehen. Da die Exponentialfunktion schneller stärker wächst als Polynome, erhalten wir die Behauptung.

Wir definieren nun zunächst

$$\begin{aligned} g(r) &:= \frac{r(r+1)}{2}, \text{ für } r \geq 1 \quad \text{und} \\ F_n &:= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)}. \end{aligned}$$

Nun werden wir per Induktion zeigen, dass $F_n = S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
F_1 &= (-1)^0 \frac{P_1}{P_0} x^{0\cdot 1+g(0)} + (-1)^1 \frac{P_1}{P_1} x^{1\cdot 1+g(1)} \\
&= (1-x) - x^2 \\
&= 1 + (-1)\left(x^{\omega(1)} + x^{\omega(-1)}\right) \\
&= S_1.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun zeigen, dass $F_n - F_{n-1} = S_n - S_{n-1}$ gilt, folgt die Behauptung. Wir betrachten $F_n - F_{n-1}$, also

$$F_n - F_{n-1} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)}.$$

Wir benutzen nun, dass $P_n = (1-x^n)P_{n-1}$ gilt und erhalten daraus

$$\begin{aligned}
F_n - F_{n-1} = (-1)^n x^{n^2+g(n)} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r (1-x^n) \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{rn+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)} \\
=: (1)\ .
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren aus und fassen dann den zweiten und vierten Term zusammen

$$\begin{aligned}
(1) &= (-1)^n x^{n^2+g(n)} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{rn+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{(r+1)n+g(r)} \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)} \\
&= (-1)^n x^{n^2+g(n)} + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)} (x^r - 1) - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{(r+1)n+g(r)} \\
&=: (2)\ .
\end{aligned}$$

Wir führen eine Indexverschiebung beim letzten Term durch und benutzen dann, dass $\frac{x^r-1}{P_r} = -\frac{1}{P_{r-1}}$ gilt. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
(2) &= (-1)^n x^{n^2+g(n)} + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_r} x^{r(n-1)+g(r)} (x^r - 1) - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)} \\
&= (-1)^n x^{n^2+g(n)} + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{-P_{r-1}} x^{r(n-1)+g(r)} - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)} \\
&=: (3)\ .
\end{aligned}$$

Wir vereinfachen den zweiten Term und multiplizieren den dritten Term mit -1 und bekommen

$$(3) = (-1)^n x^{n^2+g(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{r(n-1)+g(r)} + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)}$$
$$=: (4)\ .$$

Wir benutzen, dass $r(n-1) + g(r) = rn - r + \frac{r(r+1)}{2} = rn + \frac{r^2+r-2r}{2} = rn + g(r-1)$ gilt

$$(4) = (-1)^n x^{n^2+g(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)} + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{P_{n-1}}{P_{r-1}} x^{rn+g(r-1)} =: (5)\ .$$

Wir rechnen aus (Teleskopsumme) und erhalten folgendes Ergebnis

$$(5) = (-1)^n x^{n^2+g(n)} + (-1)^n x^{n^2+g(n-1)}\ .$$

Wegen

$$n^2 + g(n) = n^2 + \frac{n^2+n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

und

$$n^2 + g(n-1) = n^2 + \frac{n^2-n}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$$

ist

$$F_n - F_{n-1} = (-1)^n \left(x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)} \right) = S_n - S_{n-1},$$

also haben wir $F_n = S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Nun stellen wir den Zusammenhang zwischen F_n und P_n her und beweisen so die Behauptung. Es ist

$$F_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)} = P_n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)}$$
$$\Leftrightarrow F_n - P_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)}.$$

Wir betrachten nun $|F_n - P_n|$ um uns die Abschätzungen zu erleichtern. Mit der Dreiecksungleichung können wir nun abschätzen

$$|F_n - P_n| \leq \sum_{r=1}^{n} |(-1)^r \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)}| = \sum_{r=1}^{n} \frac{P_n}{P_r} x^{rn+g(r)}.$$

Es gilt $\frac{P_n}{P_r} \in (0,1]$ für $0 \leq x < 1$, da

$$\frac{P_n}{P_r} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - x^k\right)}{\prod\limits_{k=1}^{r} \left(1 - x^k\right)} = \prod_{k=r+1}^{n} \left(1 - x^k\right)$$

und jeder Faktor ist kleiner oder gleich 1 für $0 \leq x < 1$.

Für jeden Faktor $x^{rn+g(r)}$ gilt

$$x^{rn+g(r)} = x^{rn+\frac{r^2+r}{2}} \leq x^{n+1}, \text{ denn } 0 \leq x < 1 \text{ und } rn + \frac{r^2+r}{2} \geq n+1 \text{ da } r \geq 1.$$

Damit haben wir

$$|F_n - P_n| \leq n x^{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

das heißt

$$|S_n - P_n| \leq n x^{n+1},$$

und da $F_n = S_n$ gilt, folgt nun die Behauptung für $0 \leq x < 1$. Durch Anwendung des Identitätssatzes folgt wieder die Behauptung für den Einheitskreis. □

Der Eulersche Pentagonalzahlensatz steht in engem Zusammenhang mit der dedekindschen η-Funktion

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m \tau}\right).$$

Im Wesentlichen ist $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$ für $x := e^{2\pi i \tau}$ die η-Funktion.

Im Vortrag „Partitionen II“ werden wir einen kombinatorischen Beweis von Eulers Pentagonalzahlensatz kennenlernen.

§4 Eulers Rekursionsformel für die Partitionsfunktion

In diesem Abschnitt lernen wir eine Rekursionsformel für die Partitionsfunktion kennen.

(4.1) Satz (Eulers Rekursionsformel für $p(n)$)
Sei $p(0) = 1$ und $p(n) := 0$ für alle $n < 0$. Für alle $n \geq 1$ gilt dann

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + \ldots = 0\,,$$

also

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(p(n-\omega(k)) + p(n-\omega(-k))\right).$$

Beweis
Aus den vorherigen Sätzen erhalten wir die Identität:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\prod_{m=1}^{\infty} (1-z^m)\right) \left(\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^m}\right) \\ &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}\right)\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k) z^k\right). \end{aligned}$$

Nun möchten wir einen Koeffizientenvergleich durchführen. Zunächst bilden wir das Cauchy-Produkt der beiden Reihen und erhalten so

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}\right)\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k) z^k\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k) z^k + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j p(k-j) z^{k-j} \left(z^{\omega(j)} + z^{\omega(-j)}\right). \end{aligned}$$

Nun möchten wir eine Aussage über die Koeffizienten von x^n treffen.. Da für $k > n$ die Potenzen von x echt größer als n sind, genügt es die folgende Reihe zu betrachten

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j p(k-j) z^{k-j} \left(z^{\omega(j)} + z^{\omega(-j)}\right).$$

Wir betrachten nun für festes k die Summen. Für $k = n$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} (-1)^j p(n-j) z^{n-j} \left(z^{\omega(j)} + z^{\omega(-j)}\right) \\ &= (-1) p(n-1) z^{n-1} \left(z + z^2\right) + \dots \\ &= -p(n-1) z^n + \dots \end{aligned}$$

Für $k = n - 1$ ergibt sich folgende Summe

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \, p(n-1-j) z^{n-1-j} \left(z^{\omega(j)} + z^{\omega(-j)} \right) \\
&= (-1) p(n-2) z^{n-2} \left(z + z^2 \right) + \ldots \\
&= -p(n-2) z^n + \ldots
\end{aligned}$$

Für $k = n - 3$ bekommen wir, da k keine Pentagonalzahl ist, keinen Term x^n. Dieses Verfahren setzen wir so fort und erhalten genau die $p(n - \omega(n))$ und $p(n - \omega(-n))$ als Koeffizienten von x^n. Aus der anfangs gefolgerten Identität folgt, dass der Koeffizient von x^n gleich 0 ist, also erhalten wir die Behauptung. $\square$

(4.2) Beispiel (Einige Berechnungen für $p(n)$)
Mac Mahon hat mit dieser Rekursionsformel die $p(n)$ bis $n = 200$ bestimmt. Hier sehen wir einige Beispiele aus seiner Tabelle:

$$\begin{aligned}
p(1) &= 1 \\
p(5) &= 7 \\
p(10) &= 42 \\
p(15) &= 176 \\
p(20) &= 627 \\
p(25) &= 1\,958 \\
p(30) &= 5\,604 \\
p(40) &= 37\,338 \\
p(50) &= 204\,226 \\
p(100) &= 190\,569292 \\
p(200) &= 3\,972\,999\,029\,388.
\end{aligned}$$

Diese Beispiele zeigen, dass $p(n)$ mit wachsendem n ebenfalls sehr schnell wächst. Der größte Wert, der bis jetzt für $p(n)$ berechnet wurde ist $p(14\,031)$, eine Zahl mit 127 Stellen. D. H. Lehmer hatte diese berechnet um eine Behauptung von Ramanujan zu überprüfen, welche besagt, dass $p(14\,031) \equiv 0 \mod 11^4$ ist. Diese Behauptung war korrekt. Lehmer benutzte selbstverständlich nicht die gerade vorgestellt Rekursionsformel, sondern eine asymptotische Formel von Rademacher. Diese lautet

$$p(n) \sim \frac{\exp K\sqrt{n}}{4n\sqrt{3}} \quad \text{für } n \to \infty \text{ und } K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Für $n = 200$ ist der Wert der rechten Seite ungefähr $4 \cdot 10^{12}$, also sehr nahe an dem tatsächlichen Wert von $p(200)$, den wir oben angegeben haben. ◇

Im Vortrag „Die Rademacher-Reihe für die Partitionsfunktion" wird eine Herleitung für Rademachers Formel für $p(n)$ angegeben. Der Beweis benötigt eine Vorbereitung durch die Theorie der elliptischen Modulformen.

§5 Eine obere Schranke für $p(n)$

In diesem Abschnitt lernen wir eine obere Grenze für $p(n)$ kennen, die das Exponential $\exp(K\sqrt{n})$ beinhaltet und mit recht wenig Aufwand bewiesen werden kann.

(5.1) Satz
Für alle $n \geq 1$ gilt

$$p(n) < \exp\left(K\sqrt{n}\right) \quad \text{mit } K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Beweis
Sei $0 < x < 1$. Wir schränken x auf dieses Intervall ein, da wir gleich den reellen Logarithmus anwenden möchten. Wir betrachten

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k)x^k.$$

Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ fest

$$p(n)x^n < F(x), \quad \text{da } 0 < x < 1.$$

Wir wenden nun auf beide Seiten den Logarithmus an und bekommen (beide Seiten sind größer 0)

$$\ln\left(p(n)x^n\right) < \ln F(x).$$

Anwendung der Rechenregeln für den Logarithmus ergibt

$$\ln p(n) + n \ln x < \ln F(x).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\ln p(n) < \ln F(x) - n \ln x.$$

Eine Anwendung der Rechenregeln für den Logarithmus ergibt dann

$$\ln p(n) < \ln F(x) + n \ln \frac{1}{x}.$$

Wir betrachten nun $\ln F(x)$ und $n \ln \frac{1}{x}$ getrennt. Für $\ln F(x)$ erhalten wir mit den Rechenregeln für den Logarithmus, die wir anweden können, da das Produkt absolut konvergent und stetig ist

$$\begin{aligned}\ln F(x) &= -\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 - x^n).\end{aligned}$$

In der Analysis I (Krieg: Analysis I VI (3.13)) haben wir folgende Reihenentwicklung kennengelernt:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{für alle } 0 < x < 2.$$

Wir setzen diese Reihenentwicklung für $\ln (1 - x^n)$ ein und erhalten:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)\,(-1)^{m-1} \frac{(-x^n)^m}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{nm}}{m}$$

Nun können wir wegen der absoluten Konvergenz der beiden Summen die Summationsreihenfolge vertauschen und erhalten so mithilfe der geometrische Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{nm}}{m} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (x^m)^n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(-1 + \frac{1}{1 - x^m} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{x^m}{1 - x^m}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{1 - x^m}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1},$$

und da $0 < x < 1$ ist, gilt
$$mx^{m-1} < \frac{1-x^m}{1-x}.$$
Wir multiplizieren mit $1-x$ und dividieren durch x^m
$$\frac{m\,(1-x)}{x} < \frac{1-x^m}{x^m}.$$
Invertieren liefert
$$\frac{x^m}{1-x^m} < \frac{x}{m\,(1-x)}.$$
Dividieren wir nun durch m, so erhalten wir die für eine Abschätzung notwendige Form
$$\frac{x^m}{m\,(1-x^m)} < \frac{x}{m^2\,(1-x)}.$$
Wir wissen aus der Analysis (Krieg, Analysis IV XXI (4.6)), dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ besitzt (dies ist genau $\zeta(2)$). Wir erhalten folgende Abschätzung:
$$\begin{aligned}\ln F(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{x^m}{1-x^m}\\ &\le \frac{x}{1-x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}\\ &= \frac{\pi^2}{6t}\text{ mit } t := \frac{1-x}{x}\in[0,\infty)\text{ für } 0<x<1.\end{aligned}$$
Wir haben also eine Abschätzung für den ersten Teil hergeleitet. Nun schätzen wir $n\ln\frac{1}{x}$ ab. Für $t > 0$ gilt $\ln(1+t) < t$ (man betrachte die Ableitungen der beiden Funktionen). Wenn wir wieder $t = \frac{1-x}{x}$ setzen, erhalten wir
$$1+t = 1+\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x},\quad \text{also } \ln\frac{1}{x} < t.$$
Insgesamt gilt dann folgende Ungleichung:
$$\ln p(n) < \ln F(x) + n\ln\frac{1}{x} < \frac{\pi^2}{6t} + nt \text{ mit } t = \frac{1-x}{x} \text{ und } 0 < x < 1.$$
Wir minimieren nun die rechte Seite. Die Ableitung der Funktion
$$f(t) = \frac{\pi^2}{6t} + nt$$

ist

$$f'(t) = \frac{-\pi^2}{6t^2} + n$$

und

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6t} = nt \Leftrightarrow t = \pi\sqrt{\frac{1}{6n}}, \text{ da } 0 \leq t < \infty.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt

$$f''(\pi\sqrt{\frac{1}{6n}}) = \frac{2n\sqrt{6n}}{\pi} > 0,$$

also haben wir ein relatives Minimum der Funktion gefunden.

Wir setzen ein und erhalten

$$\ln p(n) < 2nt = 2n\pi\frac{1}{\sqrt{6n}} = \sqrt{n}\pi\sqrt{\frac{4}{6}} = K\sqrt{n}, \text{ wobei } K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wenden wir nun die Exponentialfunktion auf beide Seiten der Ungleichung an, so erhalten wir

$$p(n) < \exp K\sqrt{n}.$$

Eine sehr gute Verbesserung ohne großen beweistechnischen Aufwand liefert der folgende Satz von J. H. van Lint.

(5.2) Satz
Für alle $n > 1$ gilt

$$p(n) < \frac{\pi \exp(K\sqrt{n})}{\sqrt{6(n-1)}} \quad \text{mit } K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Beweis
Da offensichtlich $p(k) \geq p(n)$ für alle $k \geq n$ gilt, erhalten wir für $n \geq 1$ und $0 < x < 1$

mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k)x^k \\ &> \sum_{k=n}^{\infty} p(k)x^k \\ &\geq p(n) \sum_{k=n}^{\infty} x^k \\ &= p(n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \\ &= p(n) \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right) \\ &= p(n) \frac{x^n}{1-x}. \end{aligned}$$

Wenden wir nun wieder den Logarithmus auf diese Ungleichung an, so erhalten wir

$$\ln F(x) > \ln \left(p(n) \frac{x^n}{1-x} \right) = \ln p(n) - n \ln \frac{1}{x} - \ln (1-x).$$

Umstellen der Ungleichung ergibt

$$\ln p(n) < \ln F(x) + n \ln \frac{1}{x} + \ln (1-x).$$

Wie im vorherigen Beweis setzen wir $t = \frac{1-x}{x}$, also gilt $tx = x\frac{1-x}{x} = 1-x$ und somit $\ln(1-x) = \ln t - \ln \frac{1}{x}$. Wir erhalten mit Hilfe der Ergebnisse des vorherigen Beweises die Ungleichung

$$\ln p(n) < \frac{\pi^2}{6t} + n \ln \frac{1}{x} + \ln t - \ln \frac{1}{x} \leq \frac{\pi^2}{6t} + (n-1)\, t + \ln t.$$

Wir bestimmen also wieder das Minimum der linken Seite, also von $f(t) = \frac{\pi^2}{6t} + (n-1)\, t + \ln t$. Für alle $n > 1$ ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{\pi^2}{6t^2} + n - 1 + \frac{1}{t} = 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &+ t\frac{1}{n-1} - \frac{\pi^2}{6\,(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

Für $t > 0$ bekommen wir also

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{2(n-1)} + \sqrt{\frac{1}{4(n-1)^2} + \frac{\pi^2}{6(n-1)}} \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)}\sqrt{1 + \frac{2}{3}\pi^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Setzen wir desen Wert für t ein, so erhalten wir, wenn wir noch einige Abschätzungen durchführen, die Behauptung. □