# Partitionen II

Vortrag zum Seminar zur Höheren Funktionentheorie, 09.07.2008

Oliver Delpy

In diesem Vortrag geht es um Partitionen, also um Aufteilung von natürlichen Zahlen in Summen. Er setzt den Vortrag Partitionen I fort und liefert unter anderem einen neuen Beweis von Eulers Pentagonalzahlensatz sowie weitere interessante Ergebnisse.

## §1 Geometrische Repräsentation von Partitionen

Man kann Partitionen auf einfache Weise geometrisch darstellen. Dafür verwendet man ein Schema, auch Graph genannt, welches aus Punkten besteht. Als Beispiel betrachten wir die folgende Partition von 15

$$6 + 3 + 3 + 2 + 1.$$

Sie kann als Graph dargestellt werden:

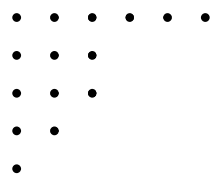

Abbildung 1

Wenn man diesen Graph nun vertikal statt horizontal liest, erhält man wieder eine Partition von 15, nämlich

$$5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1,$$

diese nennt man die *konjugierte Partition*.

Man erhält nun offensichtlich folgenden Satz:

**(1.1) Satz**
Die Anzahl von Partitionen von $n$ in $m$ Teile ist genau so groß wie die Anzahl der Partitionen von $n$, deren größter Teil $m$ ist. $\diamond$

Auf ähnliche Weise können weitere Sätze gezeigt werden, für stärkere Resultate benötigt man allerdings eine analytischere Herangehensweise, zu der wir später kommen. Im nächsten Abschnitt zeigen wir eine Anwendung der Graphen, es wird Eulers Pentagonalzahlensatz bewiesen.

## § 2 Kombinatorischer Beweis von Eulers Pentagonalzahlensatz

Zunächst wiederholen wir zwei Definitionen:

**(2.1) Definition (Pentagonalzahl)**
Wir definieren

$$\omega(n) := \sum_{k=0}^{n-1}(3k+1) = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2-n}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

diese Zahlen nennt man *Pentagonalzahlen*. ◇

**(2.2) Definition**
Wir definieren die Abkürzungen $p_e(n)$ und $p_o(n)$ für die Anzahl der Partitionen von n in eine gerade beziehungsweise ungerade Anzahl von ungleichen Teilen. ◇

Nun liefern wir einen kombinatorischen Beweis von Eulers Pentagonalzahlensatz, einen anderen Beweis haben wir im vorherigen Vortrag schon gesehen.

**(2.3) Satz (Eulers Pentagonalzahlensatz)**
Sei $|x| < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\omega(n)}.\end{aligned}$$

◇

**Beweis**
Wir wissen bereits, dass

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(n) - p_o(n))\,x^n$$

gilt.

Wir zeigen nun, dass $p_e(n) = p_o(n)$ gilt, außer wenn $n$ eine Pentagonalzahl ist. Dazu betrachten wir den Graphen einer Partition von $n$ in ungleiche Teile. Wir sagen, dass der Graph in *Standardform* ist, wenn die Zeilen in absteigender Reihenfolge sortiert sind, so wie in Abbildung 2. Die längste Verbindung zwischen Punkten in der letzten Reihe wird *Basis (base)* genannt, die Anzahl Punkte wird mit $b$ bezeichnet. Es gilt also $b \geq 1$. Die längste Verbindung im 45°-Winkel, die am Ende der ersten Reihe beginnt, wird *Schräge (slope)* genannt, die Anzahl Punkte wird mit $s$ bezeichnet. Sie ist ebenfalls größer als 1. In Abbildung 2 ist $b = 2$ und $s = 4$.

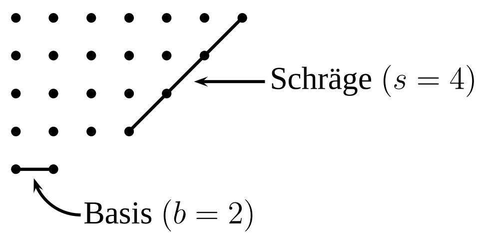


Abbildung 2

Jetzt definieren wir zwei Operationen A und B auf dem Graph. Operation A verschiebt die Basis, so dass sie parallel zur Schräge liegt, Operation B verschiebt die Schräge unter die Basis. Illustriert ist das in den Abbildungen 3 und 4.

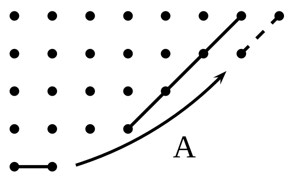


Abbildung 3

Wir nennen eine solche Operation *zulässig*, wenn der neu entstandene Graph wieder in Standardform ist, also aus ungleichen Teilen besteht, die in absteigender Reihenfolge sortiert sind.

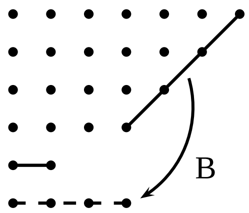


Abbildung 4

Wenn A zulässig ist, erhält man eine neue Partition von $n$ in ungleiche Teile, es gibt aber einen Teil weniger als vorher. Wenn B zulässig ist, erhält man ebenfalls eine neue Partition von $n$ in ungleiche Teile, es gibt einen Teil mehr als zuvor.

Wenn also für jede Partition von $n$ entweder A oder B zulässig ist, dann sind jeweils zwei Partitionen über A und B verbunden. Es folgt $p_e(n) = p_o(n)$, da eine ungerade Partition durch A oder B in eine gerade Partition übergeht und umgekehrt.

Um nun zu bestimmen, ob A oder B zulässig ist, betrachten wir drei Fälle:

- 1. Fall: Wenn $b < s$ ist, gilt $b \leq s - 1$. Operation A ist zulässig, Operation B nicht, denn B zerstört die Standardform (siehe Abbildung 4).
- 2. Fall: Wenn $b = s$, ist Operation B nicht zulässig, da der entstandene Graph nicht in Standardform ist. Operation A ist erlaubt, außer in den Fällen, in denen Basis und Schräge überlappen. Dies ist in Abbildung 5 gezeigt.
- 3. Fall: Wenn $b > s$ gilt, ist Operation A nicht zulässig. B hingegen wohl, außer in dem Fall, dass $b = s + 1$ gilt und Basis und Schräge überlappen. Diese Situation zeigt Abbildung 6.

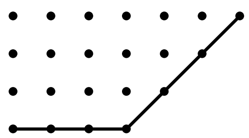

Abbildung 5

Es folgt also, dass entweder A oder B zulässig ist, außer in den beiden Ausnahmefällen.

Wir betrachten nun den ersten Ausnahmefall, wie er in Abbildung 5 gezeigt ist. Sei $k$ die Anzahl der Reihen im Graph, also $k = s = b$. Demnach lässt sich $n$ folgendermaßen berechnen:

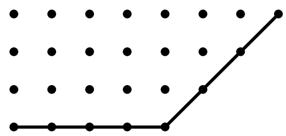

Abbildung 6

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} k + i = \frac{3k^2 - k}{2} = \omega(k)$$

Für dieses $n$ gibt es also eine Extrapartition in eine gerade Anzahl, wenn $k$ gerade ist, beziehungsweise eine ungerade Anzahl, wenn $k$ ungerade ist. Demnach erhält man

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k.$$

Im anderen Ausnahmefall gibt es einen zusätzlichen Punkt in jeder Reihe, also ist

$$n = \frac{3k^2 - k}{2} + k = \frac{3k^2 + k}{2} = \omega(-k)$$

und wieder folgt $p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$. Damit ist Eulers Satz bewiesen. □

# §3 Jakobis Tripelproduktidentität

**(3.1) Satz (Jakobis Tripelproduktidentität)**
Für komplexe $x$ und $z$ mit $|x| < 1$ und $z \neq 0$ gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1} z^2)(1 + x^{2n-1} z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m}.$$

◇

**Beweis**

Da $|x| < 1$ gilt, sind die drei Produkte $\prod(1-x^{2n})$, $\prod(1+x^{2n-1}z^2)$ und $\prod(1+x^{2n-1}z^{-2})$ sowie die rechte Seite absolut konvergent. Dies folgt sofort aus Satz XXVI 3.6 aus der höheren Funktionentheorie I. Für festes $x$ mit $|x| < 1$ konvergieren die Produkte und die Summe sogar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen der komplexen Ebene, die die Null nicht enthalten, sie sind also holomorphe Funktionen abhängig von $z$ mit $z \neq 0$. Für festes $z \neq 0$ konvergieren sie für $|x| \leq r < 1$, sie repräsentieren also außerdem holomorphe Funktionen abhängig von $x$ für $|x| < 1$. Nun lassen wir zunächst $x$ fest und definieren $F_x(z)$ für $z \neq 0$ als

$$F_x(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2}).$$

Als erstes zeigen wir für $F_x$ die folgende Funktionalgleichung für:

$$xz^2F(xz) = F_x(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*,\ |x| < 1. \tag{1}$$

Setzen wir $xz$ in $F_x$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F_x(xz) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n+1}z^2)(1+x^{2n-3}z^{-2}) \\ &= \prod_{m=2}^{\infty}(1+x^{2m-1}z^2)\prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2r-1}z^{-2}). \end{aligned}$$

Da $xz^2 = (1+xz^2)/(1+x^{-1}z^{-2})$ gilt, liefert Multiplikation der letzten Gleichung mit $xz^2$ genau die Funktionalgleichung (1).

Wir definieren nun $G_x(z)$ über

$$G_x(z) = F_x(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}).$$

Trivialerweise erfüllt $G_x(z)$ die Funktionalgleichung für $F_x(z)$. Außerdem ist $G_x(z)$ eine gerade Funktion von $z$, da $F_x(z)$ nur gerade Potenzen von $z$ enthält. Zudem ist $G_x(z)$ holomorph für alle $z \neq 0$ ist, also gibt es eine Laurententwicklung

$$G_x(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m}$$

mit $a_{-m} = a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, da $G_x(z) = G_x(z^{-1})$ und damit die Koeffizienten der negativen Potenzen von $z$ schon durch die der Positiven festgelegt sind und umgekehrt. Wenn wir nun Gleichung (1) für $G_x(z)$ anwenden, erhalten wir durch einen Koeffizientenvergleich der beiden Seiten die rekursive Formel

$$a_m = x^{2m-1} a_{m-1}.$$

Da $\sum_{i=1}^{m}(2i-1) = m^2$ ergibt dies

$$a_m = a_0 x^{m^2} \quad \text{für alle } m \geq 0.$$

Aufgrund von $a_{-m} = a_m$ hat man $a_m = a_0 x^{m^2}$ auch für negative $m$, also ist

$$G_x(z) = a_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m}.$$

Da nach Definition $G_0(z) = 1$ ist, muss $a_0(x) \to 1$ für $x \to 0$ gelten. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $a_0(x) = 1$ für alle $x$ gilt.

Mit $a_0(x) \neq 0$, da sonst schon $G_x(z) \equiv 0$, wählen wir nun $z = e^{i\pi/4}$ und erhalten

$$\frac{G_x(e^{i\pi/4})}{a_0(x)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} i^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n} x^{(2n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n} (x^4)^{n^2} = \frac{G_{x^4}(i)}{a_0(x^4)}, \tag{2}$$

da $i^m = -i^{-m}$ für ungerade $m$.

Aufgrund der ursprünglichen Definition für $G_x(z)$ gilt nun

$$\begin{aligned} G_x(e^{i\pi/4}) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+ix^{2n-1})(1-ix^{2n-1}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{4n-2}). \end{aligned}$$

Mit

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})(1-x^{4n-2})$$

folgt

$$\begin{aligned} G_x(e^{i\pi/4}) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})(1-x^{4n-2})(1+x^{4n-2}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})(1-x^{8n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{8n})(1-x^{8n-4})(1-x^{8n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-(x^4)^{2n})(1+i^2(x^4)^{2n-1})(1+i^{-2}(x^4)^{2n-1}) \\ &= G_{x^4}(i), \end{aligned}$$

also haben wir mit Gleichung (2) $a_0(x) = a_0(x^4)$ beziehungsweise $a_0(x) = a_0(x^{4^k})$ für $k = 1, 2, \ldots$. Für beliebiges $x$ mit $|x| < 1$ kann man nun den Grenzwert $k \to \infty$ ausrechnen. So erhält man $a_0(x) = 1$, da die rechte Seite wegen $a_0(x) \to 1$ für $x \to 0$ gegen 1 konvergiert.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

# §4 Konsequenzen aus der Jakobi-Identität

Wenn man in Jakobis Identität $x$ durch $x^a$ und $z^2$ durch $x^b$ ersetzt, erhält man

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2na})(1+x^{2na-a+b})(1+x^{2na-a-b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{am^2+bm}.$$

Dies ist erlaubt, wenn $x$ nicht 0 ist, denn dann ist $x^a$ wieder kleiner als 1 und $x^b$ in $\mathbb{C}^*$.

Ersetzt man $z^2$ stattdessen durch $-x^b$ erhält man

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2na})(1-x^{2na-a+b})(1-x^{2na-a-b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{am^2+bm}.$$

Setzt man nun $a = 3/2$ und $b = 1/2$, liefert dies

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{3n})(1-x^{3n-1})(1-x^{3n-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{(3/2)m^2+(1/2)m}$$

$$\iff \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{n}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{\omega(-m)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{\omega(m)},$$

also genau Eulers Pentagonalzahlensatz.

Eine weitere wichtige Formel für die dritte Potenz des Euler-Produkts lässt sich mit Jakobis Identität beweisen:

**(4.1) Satz**
Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m m x^{(m^2+m)/2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{(m^2+m)/2}.\end{aligned}$$

◇

**Beweis**
Ersetzt man in Jakobis Identität $z^2$ durch $-xz$, liefert dies

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-x^{2n-2}z^{-1}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}(-xz)^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}z^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}(z^m - z^{-m-1}).\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-2}z^{-1}) \\ &= (1-z^{-1})\prod_{n=2}^{\infty}(1-x^{2n-2}z^{-1}) \\ &= (1-z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}z^{-1})\end{aligned}$$

und

$$z^m - z^{-m-1} = z^m\left(1-(z^{-1})^{2m+1}\right) = (1-z^{-1})z^m\sum_{k=0}^{2m} z^{-k},$$

ein, so folgt

$$(1-z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-x^{2n}z^{-1})$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}(1-z^{-1})z^m\sum_{k=0}^{2m}z^{-k}.$$

Kürzt man $(1-z^{-1})$ und ersetzt $z$ durch 1 sowie $x$ durch $\sqrt{x}$, bekommt man

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{(m^2+m)/2}(2m+1).$$

Außerdem ist nun

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{(m^2+m)/2}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m m x^{(m^2+m)/2}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+1)x^{(m^2+m)/2}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m x^{(m^2+m)/2}+1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{-(m+1)}(-(m+1))x^{((m+1)^2-(m+1))/2}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m x^{(m^2+m)/2}+1+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{-m}(-m)x^{(m^2-m)/2}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m x^{(m^2+m)/2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{-m}(-m)x^{(m^2-m)/2}\\
&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m m x^{(m^2+m)/2}
\end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung. □

# §5 Logarithmische Differentiation von erzeugenden Funktionen

Im letzten Vortrag wurde schon eine rekursive Formel für $p(n)$ bestimmt. Es gibt noch weitere Rekursionsformeln für arithmetische Funktionen, die man über logarithmische Differentiation von erzeugenden Funktionen berechnen kann. In diesem Abschnitt beschreiben wir diese Methode.

Sei $A \subset \mathbb{N}$ und $f(n)$ für $n \in A$ eine arithmetische Funktion.

Vorausgesetzt,

$$F_A(x) = \prod_{n\in A} (1 - x^n)^{-f(n)/n}$$

und

$$G_A(x) = \sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n} x^n$$

konvergieren absolut für $|x| < 1$ und repräsentieren holomorphe Funktionen auf der Einheitsscheibe. Für $0 < x < 1$ ist der Logarithmus des Produkts dann gegeben durch

$$\log F_A(x) = -\sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n} \log(1 - x^n) = \sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} G_A(x^m).$$

Es wurde die Potenzreihendarstellung des reellen Logarithmus benutzt. Da der Logarithmus auf $K_1(1)$ holomorph ist, kann man die Aussage mit dem Identitätssatz auf diesen Kreis ausdehnen.

Wir differenzieren, multiplizieren mit $x$ und erhalten

$$x\frac{F_A'(x)}{F_A(x)} = x(\log F_A(x))' = \sum_{m=1}^{\infty} G_A'(x^m)x^m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in A} f(n)x^{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n) f(n) x^{mn}.$$

Dabei ist $\chi_A$ die charakteristische Funktion auf $A$. Die Gleichung gilt für reelle $x$, für komplexe $x$ folgt sie wieder aus dem Identitätssatz.

Sammelt man nun die Terme mit $mn = k$, erhält man

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n) f(n) x^{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} f_A(k) x^k,$$

wobei

$$f_A(k) = \sum_{d|k} \chi_A(d) f(d) = \sum_{d|k,\ d\in A} f(d).$$

Es gilt also

$$xF_A'(x) = F_A(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_A(k) x^k. \tag{3}$$

Da $F_A(x)$ ausgeschrieben eine Potenzreihe mit konstantem Koeffizienten 1 ist, schreiben wir das Produkt in

$$F_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{A,f}(n) x^n \quad \text{mit } p_{A,f}(0) = 1$$

um und setzen es in Formel (3) ein. So erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_{A,f}(n) x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_{A,f}(n) x^n \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_A(k) x^k \right).$$

Mithilfe des Cauchy-Produktes erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_{A,f}(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{A,f}(n-k) f_A(k) x^n,$$

da $f_A(0) = 0$.

Koeffizientenvergleich liefert den folgenden Satz:

**(5.1) Satz**
Für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ und eine arithmetische Funktion $f$ definiere die Zahlen $p_{A,f}(n)$ durch

$$\prod_{n \in A} (1 - x^n)^{-f(n)/n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{A,f}(n) x^n.$$

Dann erfüllen die $p_{A,f}(n)$ folgende Rekursionsformel:

$$n p_{A,f}(n) = \sum_{k=1}^{n} p_{A,f}(n-k) f_A(k). \tag{4}$$

Hier ist $p_{A,f}(0) = 1$ und

$$f_A(k) = \sum_{d \mid k,\ d \in A} f(d).$$

◇

**(5.2) Beispiel**
Sei $A = \mathbb{N}$. Wenn $f(n) = n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $p_{A,f} = p$, die unbeschränkte Partitionsfunktion, nach dem Satz von Euler aus dem Vortrag Partitionen I. Außerdem ist $f_A(k) = \sigma(k)$, die Summe aller Teiler von $k$. Gleichung (4) wird dann zu

$$n p(n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) p(n-k).$$

Dies ist eine bemerkenswerte Relation, die eine Funktion der multiplikativen Zahlentheorie mit einer der Additiven verknüpft. ◇

**(5.3) Beispiel**
Sei $A$ wie in Beispiel (5.2) und $f(n) = -n$. Dann erhält man

$$np_{A,f}(n) = -\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) p_{A,f}(n-k) = -\sigma(n) - \sum_{k=1}^{n-1} p_{A,f}(k)\sigma(n-k), \tag{5}$$

wobei

$$p_{A,f}(n) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{wenn } n \text{ eine Pentagonalzahl } \omega(m) \text{ oder } \omega(-m) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ keine Pentagonalzahl ist.} \end{cases}$$

Dies folgt aus Eulers Pentagonalzahlensatz (2.3).

Gleichung (5) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} &\sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) + \sigma(n-5) + \sigma(n-7) - \cdots \\ &= \begin{cases} (-1)^{m-1}\omega(m), & \text{wenn } n = \omega(m), \\ (-1)^{m-1}\omega(-m), & \text{wenn } n = \omega(-m), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Summe auf der linken Seite bricht ab, wenn das Argument von $\sigma$ kleiner gleich 1 wird. Für $n = 6$ beziehungsweise $n = 7$ gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} \sigma(6) &= \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1), \\ \sigma(7) &= \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - 7. \end{aligned}$$

◇

# § 6 Die Partitionsidentitäten von Ramanujan

Beim Überprüfen von MacMahons Tabelle der Partitionsfunktion fand Ramanujan einige Eigenschaften von $p(n)$. Zum Beispiel bewies er

$$p(5m+4) \equiv 0 \pmod 5, \tag{6}$$

$$p(7m+5) \equiv 0 \pmod 7, \tag{7}$$

$$p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11} \tag{8}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Im Zusammenhang mit diesen Entdeckungen postulierte er folgende zwei Identitäten ohne Beweis

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5m+4)x^m = 5\frac{\phi(x^5)^5}{\phi(x)^6}, \tag{9}$$

und

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(7m+5)x^m = 7\frac{\phi(x^7)^3}{\phi(x)^4} + 49\frac{\phi(x^7)^7}{\phi(x)^8}, \tag{10}$$

mit

$$\phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n).$$

Da die Funktionen auf der rechten Seite von (9) und (10) Reihenentwicklungen mit ganzen Koeffizienten haben, implizieren diese Gleichungen sofort die Kongruenzen (6) und (7).

Basierend auf der Theorie der Modulfunktionen wurden für (9) und (10) Beweise von Darling, Mordell, Rademacher, Zuckerman und anderen gefunden. Es existieren außerdem Beweise ohne diese Theorie, gefunden von Kruyswijk und Kolberg.

---

Literatur:
T. M. Apostol: Introduction to Analytic Number Theory, Springer 1998 (Kap. 14)