Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 20.04.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 1

Abgabe bis Montag, den 27.04.2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien (R, ∂) ein Differentialring, $a, b \in R$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\partial(a^k) = ka^{k-1}\partial(a)$

(b) Falls $\frac{a}{b} \in R$, so gilt $\partial(\frac{a}{b}) = \frac{\partial(a)b - a\partial(b)}{b^2}$

(c) $\partial^k(ab) = \sum\limits_{i+j=k} \binom{k}{i} \partial^i(a)\partial^j(b)$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei (R, ∂) ein Differentialring. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $K_R \subset R$ der Konstanten ist ein Ring.

(b) Falls R ein Körper ist, so ist auch K_R ein Körper.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}((z))$ der Körper der Laurentreihen über $\mathbb{C}$, d.h. der Quotientenkörper des Potenzreihenringes $\mathbb{C}[[z]]$. Wir versehen F mit der Derivation $\partial = \frac{d}{dz}$.

(a) Für welche $a \in F^\times = F\backslash\{0\}$ hat die inhomogene Differentialgleichung $\partial(y) = a$ Lösungen in F?

(b) Für welche $a \in F^\times$ hat die Gleichung $\partial(y) = ay$ eine Lösung in $F^\times$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien (R, ∂) ein Differentialring und $A \trianglelefteq R$ ein Differentialideal mit $\sqrt{A} = A$ (ein *Differentialradikalideal*).

(a) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in R$ mit $ab \in A$ gilt $a\partial(b) \in A$ und $\partial(a)b \in A$.

(b) Es sei $S \subseteq R$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge B definiert durch

$$B := \{b \in R |\ Sb \subseteq A\}$$

wiederum ein Differentialradikalideal ist.