Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 27.04.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 2

Abgabe bis Montag, den 04.05.2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $F = \mathbb{C}(t)$ mit $\partial_F = \frac{d}{dt}$ und $E = F(x)$ für ein x, welches algebraisch über F ist. Bestimmen sie $\partial_E(x)$ für die eindeutige Fortsetzung ∂_E von ∂_F auf E und die folgenden Elemente x:

(a) $x = \sqrt[n]{a}$, für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a \in F$

(b) $x = \sqrt{t} + \sqrt{t+i}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es seien (R, ∂) ein Differentialring, $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n \in R$ Elemente mit $\partial(f_i) = a_i f_i$ für Konstanten $a_1, \ldots, a_n \in K_R$. Bestimmen Sie die Wronski-Determinante $\mathrm{wr}(f_1, \ldots, f_n)$.

(b) Es sei $F = \mathbb{C}(t)$ mit $\partial_F = \frac{d}{dt}$. Berechnen Sie die Taylorreihe $\theta_x(T)$ zu $x = \frac{1}{t}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper der Charakteristik Null. Für einen Differentialoperator $\ell = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^i \in F[\partial]$ definieren wir $\ell^* = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial^i a_i$.

(a) Zeigen Sie: $\iota : F[\partial] \to F[\partial]$, $\ell \mapsto \ell^*$ ist eine Involution, d.h. ι ist additiv, $\iota(\ell_1 \ell_2) = \iota(\ell_2)\iota(\ell_1)$, und $\iota^2 = \mathrm{id}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $M \cong F[\partial]/F[\partial]\ell$ der durch ℓ definierte Differentialmodul, so ist der duale Modul gerade $M^* \cong F[\partial]/F[\partial]\ell^*$.

(c) Es sei A die Darstellungsmatrix zu M bezüglich einer Basis B. Wie sieht die Darstellungsmatrix zu M^* bezüglich der dualen Basis aus?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei F ein Differentialkörper der Charakteristik Null.

(a) Es seien (M_1, ∂_1) und (M_2, ∂_2) Differentialmoduln über F. Auf dem Vektorraum $\mathrm{Hom}_F(M_1, M_2)$ der F-Homomorphismen von M_1 nach M_2 sei eine Abbildung

$$\partial : \mathrm{Hom}_F(M_1, M_2) \to \mathrm{Hom}_F(M_1, M_2)$$

definiert durch $(\partial\phi)(x) = \partial_2(\phi(x)) - \phi(\partial_1(x))$. Zeigen Sie, daß das Paar $(\mathrm{Hom}_F(M_1, M_2), \partial)$ ein Differentialmodul ist.
(*Anmerkung:* Diese Zuordnung liefert einen *internen Hom-Funktor*

$$\mathrm{Hom}_F(-,-) : \partial\text{-Mod}(F) \times \partial\text{-Mod}(F) \to \partial\text{-Mod}(F).)$$

(b) Zeigen Sie, daß für einen Differentialmodul M über F der duale Modul M^* mit $\mathrm{Hom}_F(M, F)$ übereinstimmt.