Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 11.05.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 4

Abgabe bis Montag, den 18.05.2009, 12:00 Uhr

Alle Differentialkörper auf diesem Übungsblatt haben Charakteristik Null und algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper K.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien (F, ∂) ein Differentialkörper, $A \in F^{n\times n}$ und R/F ein Picard-Vessiot-Ring für A. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\mathrm{Gal}(E/F) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $\gamma \mapsto C_\gamma = Y^{-1}\gamma(Y)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, wobei $Y \in \mathrm{GL}_n(E)$ eine Fundamentalmatrix zu A bezeichne.

(b) Falls E/F eine endliche Körpererweiterung ist, so ist jeder Körperautomorphismus ein Differentialautomorphismus, d.h. es gilt $\mathrm{Aut}_D(E/F) = \mathrm{Aut}(E/F)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper. Bestimmen Sie die Differential-Galoisgruppen zu folgenden Differentialoperatoren:

(a) $\ell = \partial^2 - \frac{\partial(a)}{a}\partial^1$ mit $a \in F^\times$.

(b) $\ell = \partial - a\partial^0$ mit $a \in F^\times$.

(c) $\ell = \partial^2 - c^2\partial^0$ mit $c \in K^\times$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien (F, ∂) ein Differentialkörper, $A \in F^{n\times n}$ und E der Picard-Vessiot-Körper zu A mit Galoisgruppe G. Sei weiter Y eine Fundamentalmatrix für A mit Einträgen in E. Zeigen Sie:

(a) $G \subseteq \mathrm{SL}_n(K) \Leftrightarrow \det(Y) \in F$.

(b) Zeigen Sie: Es gilt $\partial(\det(Y)) = \mathrm{tr}(A)\det(Y)$, wobei $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A bezeichne. Folgern Sie, dass $G \subseteq \mathrm{SL}_n(K)$ genau dann gilt, wenn $\partial(u) = \mathrm{tr}(A)u$ eine nicht triviale Lösung in F hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ abgeschlossen, $\mathcal{U}$ sei eine nichtleere offene Teilmenge von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ sei eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{X}$ irreduzibel, so ist $\mathcal{U}$ dicht in $\mathcal{X}$ und $\mathcal{U}$ ist irreduzibel.

(b) Ist $\mathcal{Y}$ irreduzibel, so ist auch der Abschluss $\overline{\mathcal{Y}} \subseteq \mathcal{X}$ von $\mathcal{Y}$ irreduzibel.

Anmerkung: Diese Aussagen gelten allgemein für toplogische Räume $\mathcal{X}$.