Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 18.05.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 5

Abgabe bis Montag, den 25.05.2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei I eine Menge, A, B und A_i seien Ideale in $K[x_1, \ldots, x_n]$ und es sei $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}^n(K)$. Zeigen Sie:

(a) $\nu(\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} \nu(A_i)$.

(b) $\nu(A \cap B) = \nu(A) \cup \nu(B)$.

(c) $I(\nu(A)) \supseteq A$ und $\nu(I(\mathcal{X})) \supseteq \mathcal{X}$.

(d) Für $A = I(\mathcal{X})$ gilt $I(\nu(A)) = A$ und falls $\mathcal{X}$ eine (Zariski-) abgeschlossene Menge ist, so gilt $\nu(I(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine K-Algebra R heißt affin, falls R endlich erzeugt und reduziert ist. Zeigen Sie:

(a) Der Koordinatenring $K[\mathcal{X}]$ einer affinen algebraischen Menge $\mathcal{X}$ ist affin.

(b) Jede affine K-Algebra ist isomorph zum Koordinatenring einer affinen algebraischen Menge.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es K ein algebraisch abgeschlossener Körper, es sei $n \in \mathbb{N}$ und I_n bezeiche die Einheitsmatrix in $\mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen lineare algebraische Gruppen sind und bestimmen Sie im Aufgabenteil a), b) und c) den Koordinatenring:

(a) $\mathrm{D}_n(K) := \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \text{A hat Diagonalgestalt}\}$.

(b) $\mathrm{B}_n(K) := \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \text{A ist obere Dreiecksmatrix}\}$.

(c) $\mathrm{U}_n(K) := \{A \in \mathrm{B}_n(K) \mid A = (a_{ij}) \text{ mit } a_{ii} = 1 \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

(d) $\mathrm{SO}_n(K) := \{A \in \mathrm{SL}_n(K) | A^{\mathrm{tr}} A = I_n\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie: Endliche Gruppen sind lineare algebraische Gruppen über K.