Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 25.05.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 6

Abgabe bis Montag, den 08.06.2009, 12:00 Uhr

Auf den nächsten Übungsblättern gibt es jeweils nur 3 Aufgaben.

Alle Differentialkörper auf diesem Übungsblatt haben Charakteristik Null und algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper K.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper und L/F der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms f, d.h. L wird von den Nullstellen von f erzeugt. Zeigen Sie: Aus f läßt sich ein Differentialoperator $\ell \in F[\partial]$ mit Picard-Vessiot-Erweiterung L konstruieren, ohne die Nullstellen von f zu kennen. (*Hinweis:* Für eine Nullstelle x von f läßt sich $\partial(x)$ als Polynom in x ausdrücken).

(b) Es sei $F = K(t)$ mit der üblichen Derivation $\frac{d}{dt}$. Bestimmen Sie mit dem gefundenen Verfahren einen Differentialoperator, der dieselbe Erweiterung von F definiert wie das Polynom $f = X^4 + tX^2 + 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper und $a \in F$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Differentialoperators

$$\ell = \partial^2 + a\partial + \partial(a)\partial^0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $F = K(t)$ mit der üblichen Derivation. Ferner sei $r \in F$. Wir betrachten den Differentialoperator $\ell = \partial^2 - r\partial^0$. Zu dieser Gleichung gehört eine nichtlineare Gleichung, die sogenannte *Riccati-Gleichung* $\partial(u) + u^2 = r$. Es sei E/F eine Picard-Vessiot-Erweiterung für ℓ mit Galoisgruppe G und Lösungsraum $V = \mathrm{Sol}_E(\ell)$.

(a) Zeigen Sie: Ein Element $x \in E$ ist genau dann Lösung der obigen Riccati-Gleichung, wenn $x = \frac{\partial(y)}{y}$ für eine Lösung $y \in E$ von ℓ gilt.

(b) Zeigen Sie: Die Operation von G auf V ist genau dann reduzibel (d.h. es existiert ein Unterraum $0 \lneq W \lneq V$ mit $GW \subseteq W$), wenn die Riccati-Gleichung eine Lösung in F besitzt.

(c) Zeigen Sie: Wenn die Operation von G auf V irreduzibel und imprimitiv (d.h. $V = V_1 \oplus V_2$ für zwei echte Unterräume V_1 und V_2, sodass G auf $\{V_1, V_2\}$ operiert) ist, so hat die Riccati-Gleichung eine Lösung in E, die algebraisch über F vom Grad zwei ist.