



Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 7

Abgabe bis Montag, den 15.06.2009, 12:00 Uhr

Alle Differentialkörper auf diesem Übungsblatt haben Charakteristik Null und algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper K .

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper.

- (a) Es sei E/F eine Picard-Vessiot-Erweiterung zu einem normierten Differentialoperator $\ell \in F[\partial]$. Zeigen Sie: Jeder Differentialautomorphismus auf F , der die Koeffizienten von ℓ fixiert, läßt sich zu einem Differentialautomorphismus auf E fortsetzen.
- (b) Es seien $\ell_1, \ell_2 \in F[\partial]$ normierte Differentialoperatoren. Zeigen Sie: Es existieren Picard-Vessiot-Erweiterungen E_i/F zu ℓ_i ($i = 1, 2$) und eine Picard-Vessiot-Erweiterung E/F mit $E \supseteq E_i$, sodass E das Kompositum von E_1 und E_2 ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper.

- (a) Es sei E/F eine Picard-Vessiot-Erweiterung mit Galoisgruppe $G_m(K)$. Zeigen Sie: Es existiert ein Element $t \in E$ mit $\frac{\partial(t)}{t} \in F$ und $E = F(t)$.
- (b) Es sei E/F eine Picard-Vessiot-Erweiterung mit Galoisgruppe $G_m^r(K)$. Zeigen Sie: Es existieren Elemente $t_1, \dots, t_r \in E$ mit $\frac{\partial(t_i)}{t_i} \in F$ (für $i = 1, \dots, r$) und $E = F(t_1, \dots, t_r)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei F ein Differentialkörper und E eine Picard-Vessiot-Erweiterung, weiter sei $E \supseteq K \supseteq F$ ein Zwischenkörper. Zeigen Sie: Wenn K/F eine Picard-Vessiot-Erweiterung ist, so ist $\text{Gal}(E/K)$ ein Normalteiler von $\text{Gal}(E/F)$.