Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 15.06.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 8

Abgabe bis Montag, den 22.06.2009, 12:00 Uhr

Alle Differentialkörper auf diesem Übungsblatt haben Charakteristik Null und algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper K.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}(t)$ mit der üblichen Derivation. Bestimmen Sie mit MAPLE, ob der Differentialoperator

$$\partial^2 + \frac{27t}{8(t^2-3)^2}\partial^0$$

Liouvillesche Lösungen (d.h. Lösungen, die in einer Liouvilleschen Erweiterung liegen) besitzt. Vergleichen Sie dabei die Funktionen `dsolve` und `kovacicsols` des Paketes `DEtools`. Bestimmen Sie unter Verwendung der berechneten Lösungen die Differential-Galoisgruppe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Eine Picard-Vessiot-Erweiterung, die in einer Liouvilleschen Erweiterung enthalten ist, ist selber Liouvillesch.

(b) Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper und $L = F(x, f)$ die Differentialkörpererweiterung, die aus F durch Adjunktion einer Transzendenten x mit $\frac{\partial(x)}{x} \in F^\times$ und f mit $f^2 = 1 - x^2$ entsteht. Zeigen Sie unter Verwendung des Resultats aus Aufgabe 4: Obwohl L Liouvillesch ist, ist L nicht Teilkörper einer Picard-Vessiot-Erweiterung von F.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei (F, ∂) ein Differentialkörper und es sei $\ell \in F[\partial]$ ein Differentialoperator. Es sei weiter $L = F(z)$ eine transzendente Erweiterung von F, sodass ℓ eine Lösung in $L\backslash\{0\}$ besitzt.

(a) Es sei $\partial(z) \in F$. Zeigen Sie, dass ℓ eine Lösung $y \in L$ besitzt, sodass $\frac{\partial(y)}{y} \in F$ gilt.

(b) Es sei $\frac{\partial(z)}{z} \in F$. Zeigen Sie, dass ℓ eine Lösung $y \in L$ besitzt, sodass $\frac{\partial(y)}{y} \in F$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte)

Es sei F ein Körper mit $\mathrm{char}(F) \neq 2$ und es sei t transzendent über F. Es sei weiter eine nicht endliche Teilmenge $C \subseteq F$ gegeben. Zeigen Sie: Der Zerfällungskörper der Familie von Polynomen

$$\{X^2 - (1 - c^2t^2) | c \in C\}$$

ist eine algebraische Körpererweiterung von $F(t)$, die nicht endlich erzeugt werden kann.