



Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 9

Abgabe bis Montag, den 29.06.2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimmen Sie für folgende lineare algebraische Gruppen $\mathcal{G}$ die Lie-Algebra $\text{Lie}_K(\mathcal{G})$ zu $\mathcal{G}$:

- (a) $\mathcal{G} = \text{SL}_n(K)$.
- (b) $\mathcal{G} = \text{SO}_n(K) = \{A \in \text{SL}_n(K) \mid A^t A = 1\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und es sei $\mathcal{G}$ eine lineare algebraische Gruppe über K . Dann ist die Abbildung

$$\text{Ad} : \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(\text{Lie}_K(\mathcal{G})), g \mapsto \text{Ad}(g) = (\text{Lie}_K(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Lie}_K(\mathcal{G}), A \mapsto gAg^{-1})$$

ein Morphismus linearer algebraischer Gruppen. Bestimmen Sie das Differential

$$\text{ad} := d(\text{Ad}) : \text{Lie}_K(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Lie}_K(\text{GL}(\text{Lie}_K(\mathcal{G}))).$$

Hinweis: $\text{Lie}_K(\mathcal{G})$ ist ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, etwa der Dimension m , und damit ist $\text{GL}(\text{Lie}_K(\mathcal{G})) \cong \text{GL}_m(K)$ eine lineare algebraische Gruppe mit Lie-Algebra $\text{Lie}_K(\text{GL}(\text{Lie}_K(\mathcal{G}))) \cong \text{M}_m(K)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und es sei $\mathcal{G} \leq \text{GL}_n(K)$ eine lineare algebraische Gruppe über K . Zeigen Sie:

- (a) Falls $\mathcal{G}$ kommutativ ist, ist die Lie-Klammer auf $\text{Lie}_K(\mathcal{G})$ trivial, d.h. $[A, B] = 0$ für alle $A, B \in \text{Lie}_K(\mathcal{G})$.
- (b) Wenn $\mathcal{G}$ ein Element $v \in V = K^n$ stabilisiert, (d.h. $gv = v$ für alle $g \in \mathcal{G}(S)$ und alle K -Algebren S), dann gilt $Av = 0$ für alle $A \in \text{Lie}_K(\mathcal{G})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $K \leq F$ Körper.

- (a) Zeigen Sie: Die Menge $\text{Der}_K(F) = \{\partial : F \rightarrow F \text{ Derivation} \mid \partial|_K = 0\}$ der K -Derivationen auf F ist eine Lie-Algebra über F (als Unterraum der assoziativen Algebra $R = \text{Abb}(F)$ aller Abbildungen auf F bezüglich " $\circ$ ").
- (b) Es sei $F[e]$ die Algebra der Dualzahlen. Definiere $\phi_\delta : F \rightarrow F[e]$, $a \mapsto a + e\delta(a)$ für eine Abbildung $\delta : F \rightarrow F$. Zeigen Sie, dass ϕ_δ genau dann ein Homomorphismus von K -Algebren ist, wenn δ eine K -Derivation ist.