LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 29.06.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 10

Abgabe bis Montag, den 06.07.2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei $\mathcal{X}$ eine irreduzible affine Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K) und $\mathcal{Y}$ sei eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{X}$. Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{Y}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{X}$ ist, dann gilt $\dim(\mathcal{Y}) < \dim(\mathcal{X})$. Folgern Sie, dass echte abgeschlossene Untergruppen von zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppen kleinere Dimensionen als die ganze Gruppe haben.

(b) Es sei $F = \mathbb{C}(t)$ und $\partial = \frac{d}{dt}$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe der Matrix-Differentialgleichung

$$\partial(Y) = AY, \quad A = \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

über F.
Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass $e^{\frac{-t^2}{2}}$ algebraisch unabhängig (über F) von einer Stammfunktion von e^{-t^2} ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_n$ Elemente in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie (ohne Verwendung von Korollar 3.16): Die Funktionen $e^{a_1 t}, \ldots, e^{a_n t}$ sind genau dann algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}(t)$, wenn $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ (bzw. über $\mathbb{Q}$) sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}(t)$ mit der üblichen Derivation. Konstruieren Sie eine Matrix-Differentialgleichung mit Galoisgruppe $\mathbb{G}_m^3$ über F. Geben Sie allgemeiner für $n \in \mathbb{N}$ eine Matrix-Differentialgleichung mit Galoisgruppe $\mathbb{G}_m^n$ über F an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}(t)$ mit der üblichen Derivation. Betrachten Sie den Epimorphismus $\phi : \mathrm{B}_2 \to \mathbb{G}_m$ von der Standardboreluntergruppe der SL_2 auf die $\mathbb{G}_m$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a \quad (a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}).$$

Es sei E/F die Picard-Vessiot-Erweiterung, die zur Differentialgleichung $\partial(y) = y$ gehört. Geben Sie den Picard-Vessiot-Ring und die Matrix-Differentialgleichung einer Lösung für das zugehörige Einbettungsproblem an.