Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
A. Maier

Aachen, den 06.07.2009

Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 11

Abgabe bis Montag, den 13.07.2009, 12:00 Uhr

Alle Differentialkörper auf diesem Übungsblatt haben Charakteristik Null und algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper K.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}(t)$ mit der üblichen Derivation. Betrachten Sie den Epimorphismus $\phi : \mathrm{B}_2 \to \mathbb{G}_m$ von der Standardboreluntergruppe der SL_2 auf die $\mathbb{G}_m$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a \quad (a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}).$$

Es sei E/F die Picard-Vessiot-Erweiterung, die zur Differentialgleichung $\partial(y) = y$ gehört.

(a) Ist das zugehörige Einbettungsproblem effektiv? Ist es ein Frattini-Einbettungsproblem?

(b) Geben Sie eine eigentliche, effektive Lösung an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $F = K((t))$ mit der üblichen Derivation und es sei (M, ∂_M) ein Differentialmodul über F. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann regulär, wenn es eine Basis von M gibt, bezüglich derer die Darstellungsmatrix von ∂_M Koeffizienten in $K[[t]]$ hat.

(b) Falls M trivial über F ist, so ist M regulär.

(c) M ist genau dann zahm, wenn es eine Basis von M gibt, bezüglich derer die Darstellungsmatrix von ∂_M Koeffizienten in $\frac{1}{t}K[[t]]$ hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}((t))$ und es sei $\partial = \frac{d}{dt}$. Es sei weiter (M, ∂_M) ein zweidimensionaler Differentialmodul über F, wobei ∂_M bezüglich einer Basis von M gegeben sei durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zwei F-linear unabhängige Lösungen in Reihenform.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}((t))$ und $\delta = t\frac{d}{dt}$. Es sei (M, δ_M) ein dreidimensionaler Differentialmodul über F, sodass δ_M bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \sum_{k \geqslant 0} (t^{4k+1} - t^{4k+3}) + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sum_{k \geqslant 0} (t^{4k+2} - t^{4k+4})$$

gegeben sei. Bestimmen Sie eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ von M, sodass die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von δ_M bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ (d.h. $\delta_M(\tilde{\mathcal{B}}) = -\tilde{\mathcal{B}}\tilde{A}$) in Jordannormalform ist. Geben Sie sowohl die Basiswechselmatrix C (mit $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}C$) als auch die transformierte Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ an.