



Galoistheorie für Differentialgleichungen, Übungsblatt 12

Abgabe bis Montag, den 20.07.2009, 12:00 Uhr

Alle Differentialkörper auf diesem Übungsblatt haben Charakteristik Null und algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper K .

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $F = K((t))$ und $\delta = t \frac{d}{dt}$. Es seien (M_a, δ_a) und (M_b, δ_b) eindimensionale Differentialmoduln über (F, δ) , die bezüglich einer Basis $\{y_a\}$ bzw. $\{y_b\}$ durch $\delta_a(y_a) = ay_a$ bzw. $\delta_b(y_b) = by_b$ für Elemente a und $b \in F$ gegeben sind. Zeigen Sie: M_a und M_b sind genau dann isomorph als Differentialmoduln, wenn $b - a = c + \sum_{i \geq 1} c_i t^i$ für ein $c \in \mathbb{Z}$ und $c_i \in K$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $F = K((t))$ mit der üblichen Derivation. Es seien M_1, M_2 Differentialmoduln über F . Zeigen Sie:

- (a) Wenn M_1 und M_2 zahm sind, dann ist auch die direkte Summe $M_1 \oplus M_2$ zahm.
- (b) Wenn M_1 zahm ist und $M_2 \leq M_1$ ein Untermodul ist, dann ist auch M_2 zahm.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei $F = K((t))$ mit der üblichen Derivation. Zeigen Sie, dass $K((t^{1/n}))$ eine Picard-Vessiot-Erweiterung von F definiert, indem Sie explizit eine Differentialgleichung angeben. Was ist die Galoisgruppe?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $F = \mathbb{C}((t))$ und es sei

$$f = X^2 + (t^2 - 2\sqrt{2})X + 2 - t \in F[X].$$

Berechnen Sie die Nullstellen von f im algebraischen Abschluß von F .