Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 5. Mai 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 2

Abgabe bis Dienstag, den 05.05.2009, 11:30 Uhr im Abgabekasten des Lehrstuhls A für Mathematik (Hauptgebäude, vor Zimmer 155)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Seien X, Y Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$. Weiter sei $S : X \to Y$ eine lineare Abbildung, zu der ein $c > 0$ existiert mit $\|Sx\|_Y \leqslant c\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

a) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, so ist $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y.

b) Zeigen Sie: Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen den Grenzwert $x \in X$, so konvergiert $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen den Grenzwert Sx.

Aufgabe 2 (1+2+4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $p, q \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $n \leqslant m$ und $1 \leqslant q \leqslant p$.

a) Zeigen Sie für alle $f \in C^m_{2\pi}$, daß$f \in C^n_{2\pi}$ und $\|f\|_{C^m} \geqslant \|f\|_{C^n}$ gilt.

b) Zeigen Sie für alle $f \in C^n_{2\pi}$, daß$f \in L^p_{2\pi}$ und $\|f\|_{C^n} \geqslant \|f\|_p$ gilt.

c) Zeigen Sie für alle $f \in L^p_{2\pi}$, daß$f \in L^q_{2\pi}$ und $\|f\|_p \geqslant \|f\|_q$ gilt.
(Hinweis: Höldersche Ungleichung verwenden)

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)

a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten des *Abel-Poisson-Kerns*, der für $0 \leqslant r < 1$ definiert ist durch:

$$p_r(x) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

Hinweis:
Zeigen Sie als erstes die Darstellung $p_r(x) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx)$.

b) Berechnen Sie für $0 \leqslant r < 1$ die Fourier-Koeffizienten von

$$q_r(x) := \frac{2r\sin(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}.$$

Bitte wenden →

Aufgabe 4 (1+3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Funktionen (jeweils für $x \in [0, 2\pi)$ und 2π-periodisch fortgesetzt):

a) $f(x) = \cos(\alpha x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (3 Punkte)

b) $g(x) = e^x$ (1 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f und g.