Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 12. Mai 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 4

Abgabe bis Dienstag, den 19.05.2009, 11:30 Uhr im Abgabekasten des Lehrstuhls A für Mathematik (Hauptgebäude, vor Zimmer 155)

Aufgabe 1 (3+3+2+2 Punkte)

Laut Aufgabe 4 des letzten Übungsblattes gilt für alle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Zeigen Sie damit die folgenden Gleichheiten.

a) $x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$ für alle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

b) $x^4 - 2\pi^2 x^2 = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos(nx) - \frac{7}{15}\pi^4$ für alle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

Aufgabe 2 (2+1 Punkte)

a) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 1$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so daß $(c_n n^r)_{n\in\mathbb{Z}}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

wohldefiniert ist und $f \in C^m_{2\pi}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < r - 1$ gilt.

b) Verwenden Sie die Aussage aus Teil (a), um für

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n^{13{,}2} + 2n^6 - 1}$$

ein möglichst großes $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f \in C^m_{2\pi}$ zu finden.

Bitte wenden →

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$.
Eine Funktion f heißt *α-Hölder-stetig* für $0 < \alpha < 1$, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^{\alpha}.$$

Allgemeiner: Die Funktion f heißt *α-Hölder-stetig* für $m < \alpha < m + 1$, mit $m \in \mathbb{N}_0$, wenn $f \in C^m(\mathbb{R})$, und ihre m-te Ableitung zusätzlich $(\alpha - m)$-Hölder-stetig ist.

Zeigen Sie:
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion und α-Hölder-stetig, so existiert ein $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ mit

$$|\hat{f}(k)| \leqslant C|k|^{-\alpha}$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Hinweis: Für $m = 0$, zeigen Sie zunächst

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x - \tfrac{1}{k}\pi) e^{-ikx} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.