Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
J. Lehmann und C. Schnackers

Aachen, den 19. Mai 2009

Fourieranalysis, Übungsblatt 5

Abgabe bis Dienstag, den 26.05.2009, 11:30 Uhr im Abgabekasten des Lehrstuhls A für Mathematik (Hauptgebäude, vor Zimmer 155)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Geben Sie (mit Beweis) explizit Funktionen $f_m \in L^2_{2\pi}$ an mit $\hat{f}_m(0) = 0$ und $|\hat{f}_m(n)| = |n|^{-m}$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m \in \{1,2,3,4\}$, und verwenden Sie diese in 2.12(d) zur Berechnung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

Hinweis:
Orientieren Sie sich an den Funktionen auf den letzten Übungsblättern. Die dort gezeigten Fourierreihen dürfen hier natürlich ohne Beweis referenziert werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = f(\pi) = 0$. Zeigen Sie die sogenannte *Wirtinger-Ungleichung:*

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \leqslant \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx.$$

Hinweis:
Zeigen Sie zuerst, daß f sich zu einem $g \in C^1_{2\pi}$ fortsetzen läßt mit $g(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-\pi, 0)$.

Aufgabe 3 (3+1+4 Punkte)

Sei $V \subset C(\mathbb{R})$ das Erzeugnis der Menge der Exponentialfunktionen

$$\{e_\lambda\ ;\ e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad e_\lambda(x) = e^{i\lambda x} \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Jedes Element von V ist also von der Form $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j x}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$ und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Auf V definieren wir die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ durch

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \overline{g(x)} \, dx.$$

Bitte wenden →

Zeigen Sie:

a) Die oben definierte Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V.

b) Das System der Exponentialfunktionen $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ bildet ein Orthonormalsystem.

c) V ist nicht vollständig bezüglich der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm.